

Dans tout le corrigé, la notation $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^m$.

1. TRIDIAGONALISATION

1 Si u et v sont deux vecteurs, la matrice $u^\top v$ est de taille 1 et son seul coefficient vaut $(u | v)$, par définition même du produit scalaire. De ce fait, par associativité du produit matriciel, et puisque u est unitaire,

$$Hu = u - 2uu^\top u = u - 2u(u | u) = u - 2u$$

soit

$$Hu = -u$$

De même, si v est orthogonal à u , le produit scalaire $(u | v)$ est nul et par conséquent

$$Hv = v - 2uu^\top v = v - 2u(u | v) = v$$

soit

$$Hv = v$$

2 Par les propriétés usuelles de la transposition, $(^\top uu^\top) = (^\top u^\top)u^\top = uu^\top$, et la matrice $uu^\top$ est symétrique. Comme la matrice identité est elle aussi symétrique,

La matrice H est symétrique.

De plus, l'associativité du produit matriciel implique

$$(uu^\top)^2 = (uu^\top)(uu^\top) = u(u^\top u)u^\top = u(u | u)u^\top = uu^\top$$

puisque u est unitaire. Ainsi,

$$\begin{aligned} HH^\top &= H^2 && (H \text{ est symétrique}) \\ &= (I - 2uu^\top)^2 \\ &= I - 4uu^\top + 4(uu^\top)^2 && (I \text{ et } uu^\top \text{ commutent}) \\ &= I - 4uu^\top + 4uu^\top \end{aligned}$$

soit

$$HH^\top = I$$

ce qui signifie que

La matrice H est orthogonale.

On peut aussi se servir des résultats de la première question, qui se traduisent par le fait que la matrice H représente, dans la base canonique, la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$; elle est donc de fait automatiquement orthogonale.

3 Remarquons que $(g | e_1) = \gamma_1$ et que $\gamma_1 < 1$: en effet, $\gamma_1 \leq \|g\| = 1$, et l'hypothèse $\gamma_1 = 1$ impliquerait, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de son cas d'égalité, que $g = e_1$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, il est légitime de définir u comme dans l'énoncé, la racine carrée étant non nulle. Comme g et e_1 sont unitaires,

$$\|g - e_1\|^2 = \|g\|^2 - 2(g | e_1) + \|e_1\|^2 = 2(1 - \gamma_1)$$

ce qui montre que $\|u\| = 1$, c'est-à-dire que

Le vecteur u est unitaire.

Si H est définie comme dans l'équation (1) de l'énoncé, écrivons

$$\begin{aligned}(u | g) &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}} (g - e_1 | g) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}} ((g | g) - (e_1 | g)) \\ &= \frac{1-\gamma_1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}}\end{aligned}$$

d'où

$$(u | g) = \sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}}$$

et

$$H g = g - 2 u u^\top g = g - 2 u (u | g)$$

donc

$$\begin{aligned}H g &= g - 2 u \sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}} \\ &= g - 2 \sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}} \frac{g - e_1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}} \\ &= g - (g - e_1)\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{H g = e_1}$$

4 Comme x n'est pas colinéaire à e_1 , il est en particulier non nul, et le vecteur $g = x/\|x\|$, qui est bien défini, est unitaire. Par la question précédente, il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder H associée tels que $H g = e_1$, soit encore $H x = H(\|x\| g) = \|x\| H g = \|x\| e_1$:

Il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder H associée tels que $H x = \|x\| e_1$.

5 D'après la réponse à la question 2, la matrice de Householder H_1 vérifie $H_1^2 = I_{m-1}$. En effectuant un produit par blocs, la matrice $\hat{H}_1$ est de ce fait aussi sa propre inverse. Par conséquent,

Les matrices $\hat{S}$ et $\hat{Q}$ sont semblables.

Réécrivons la condition sur les coefficients de la première ligne et la première colonne en calculant explicitement $\hat{S}$. Cela donne

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \hat{H}_1 \hat{Q} \hat{H}_1 \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & H_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & q_{21}^\top \\ \hline q_{21} & Q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & H_1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & H_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & q_{21}^\top H_1 \\ \hline q_{21} & Q H_1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

soit

$$\hat{S} = \left(\begin{array}{c|c} c & q_{21}^\top H_1 \\ \hline H_1 q_{21} & H_1 Q H_1 \end{array} \right)$$

On souhaite par conséquent que le produit $H_1 q_{21}$ soit proportionnel à e_1 , premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{m-1}$. Distinguons deux cas.

- Si q_{21} n'est pas colinéaire à e_1 , la question précédente fournit une matrice de Householder H_1 telle que $H_1 q_{21}$ soit proportionnel à e_1 .
- Si q_{21} est colinéaire à e_1 , avec disons $q_{21} = \lambda e_1$, la matrice de Householder associée à e_1 convient : le premier résultat de la question 1 implique l'égalité $H_1 q_{21} = \lambda H_1 e_1 = -\lambda e_1$, et en particulier $H_1 q_{21}$ est proportionnel à e_1 .

Dans tous les cas,

Il est possible de choisir H_1 de sorte que $\hat{\sigma}_{i1} = \hat{\sigma}_{1i} = 0$ pour $i \geq 3$.

6 Il s'agit d'itérer le processus de manière à construire une suite de matrices toutes semblables à $\hat{Q}$, symétriques, et « de plus en plus proches » d'une matrice tridiagonale symétrique. Pour formaliser, procédons par récurrence ; soit $\mathcal{P}(m)$ la proposition

« Pour toute matrice $\hat{Q}$, symétrique réelle et de taille m , il existe une matrice P , orthogonale et de taille $m-1$, telle la matrice $\hat{P}^\top \hat{Q} \hat{P}$ soit tridiagonale avec

$$\hat{P} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & P \end{array} \right) \quad (1)$$

Ceci permet de conclure, puisque la matrice tridiagonale $\hat{P}^\top \hat{Q} \hat{P}$ est orthogonalement semblable à la matrice symétrique $\hat{Q}$, et en particulier symétrique.

Remarquons que $\mathcal{P}(1)$ est clairement vérifiée. Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un entier m et prouvons-la pour $m+1$. Prenons une matrice symétrique $\hat{Q}$ de taille $m+1$. Par le résultat de la question précédente, il existe une matrice de Householder $\hat{H}_1$ telle que

$$\hat{H}_1 \hat{Q} \hat{H}_1 = \left(\begin{array}{c|c} c & \lambda e_1^\top \\ \hline \lambda e_1 & S \end{array} \right) \quad (2)$$

pour certains réels c et λ et pour une certaine matrice symétrique réelle S , où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Prenons deux matrices $\bar{P}$ et P réalisant les conditions de l'hypothèse de récurrence pour S — en remplaçant $(\hat{Q}, P, \hat{P})$ par $(S, \bar{P}, P)$ —, et posons

$$\hat{P}' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & P \end{array} \right) \quad (3)$$

L'hypothèse de récurrence implique en particulier $P^\top e_1 = e_1$ et

$$\begin{aligned} {}^\top \hat{P}' (\hat{H}_1 \hat{Q} \hat{H}_1) \hat{P}' &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & P^\top \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & \lambda e_1^\top \\ \hline \lambda e_1 & S \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & P \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & P^\top \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & \lambda e_1^\top P \\ \hline \lambda e_1 & SP \end{array} \right) \end{aligned}$$

donc
$$\begin{aligned} {}^\top \hat{P}' (\hat{H}_1 \hat{Q} \hat{H}_1) \hat{P}' &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & P^\top \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} c & \lambda e_1^\top \\ \hline \lambda e_1 & SP \end{array} \right) \quad (\text{car } P^\top e_1 = e_1) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} c & \lambda e_1^\top \\ \hline \lambda P^\top e_1 & P^\top SP \end{array} \right) \end{aligned}$$

soit
$${}^\top \hat{P}' (\hat{H}_1 \hat{Q} \hat{H}_1) \hat{P}' = \left(\begin{array}{c|c} c & \lambda e_1^\top \\ \hline \lambda e_1 & P^\top SP \end{array} \right) \quad (\text{encore car } P^\top e_1 = e_1)$$

Maintenant, par hypothèse de récurrence, la matrice $P^\top S P$ est tridiagonale, et par conséquent la matrice ${}^\top \hat{P}' (\hat{H}_1 \hat{Q} \hat{H}_1) \hat{P}'$ l'est aussi. De plus $\hat{H}_1$ et $\hat{P}'$ sont orthogonales, et par conséquent leur produit l'est aussi. Comme elles sont toutes deux obtenues à partir d'un bloc de taille m — respectivement H_1 et P —, leur produit $\hat{P} = \hat{H}_1 \hat{P}'$ est lui aussi par blocs. Les conditions de l'hypothèse de récurrence sont par conséquent réunies, et on conclut par le principe de récurrence que

La propriété $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout entier m .

La récurrence ci-dessus prouve le bon fonctionnement du procédé récursif suivant :

- **Entrée :** une matrice $\hat{Q}$ symétrique réelle de taille m .
Sortie : une matrice $\hat{P}$ orthogonale de taille m , de la forme **(1)**, telle que la matrice $\hat{P}^\top \hat{Q} \hat{P}$ soit tridiagonale.
- **Si** $m \leq 2$, **renvoyer** $\hat{P} = I_m$. **Sinon :**
 - **Soient** c, q_{21} et Q les éléments du découpage par blocs de $\hat{Q}$.
 - **Si** q_{21} n'est pas colinéaire à e_1 , poser $g = q_{21}/\|q_{21}\|$, lui associer u comme dans la question 3, et poser $H_1 = I - 2uu^\top$.
Sinon, poser $H_1 = I - 2e_1e_1^\top$.
 - **Soient** $\hat{H}_1$ par blocs et S comme dans l'équation **(2)**.
 - **Faire un appel récursif** sur S pour obtenir une matrice P .
 - **Soit** $\hat{P}'$ comme dans **(3)**.
 - **Renvoyer** $\hat{H}_1 \hat{P}'$.

2. MATRICES DE JACOBI

7 Avec les conventions de l'énoncé sur les a_i et en convenant de la même façon que $\xi_0 = \xi_{m+1} = 0$, l'hypothèse $T_0 x = \lambda x$ se traduit par les m équations

$$a_{i-1} \xi_{i-1} + b_i \xi_i + a_i \xi_{i+1} = \lambda \xi_i$$

pour $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$. Supposons que $\xi_m = 0$ et montrons par récurrence descendante forte que $\xi_{m-k} = 0$ pour $k \in \llbracket -1; m-1 \rrbracket$. Plus précisément, considérons l'assertion

$$\mathcal{P}(k) : \forall j \in \llbracket -1; m-1 \rrbracket, j \leq k \implies \xi_{m-j} = 0$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
- Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k \leq m-2$. Alors l'équation

$$a_{m-k-1} \xi_{m-k-1} + b_{m-k} \xi_{m-k} + a_{m-k} \xi_{m-k+1} = \lambda \xi_{m-k}$$

se réécrit $a_{m-k-1} \xi_{m-k-1} = 0$. Puisque $m-k-1 \geq 1$ et que par conséquent a_{m-k-1} est non nul, cela implique $\xi_{m-k-1} = \xi_{m-(k+1)} = 0$, et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Le principe de récurrence assure que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier naturel $k \leq m-1$. En particulier, $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie.

Cela permet de conclure que $x = 0$, ce qui est contraire à la définition d'un vecteur propre. Finalement,

$$\boxed{\xi_m \neq 0}$$

8 Soit λ un élément de $\sigma(T_0)$ et prenons $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ deux vecteurs propres pour la valeur propre λ . En posant $z = y_m x - x_m y = (z_i)$, on trouve par linéarité $T_0 z = \lambda z$ et $z_m = 0$. Si z était non nul, ce serait un vecteur propre, ce qui est impossible du fait du résultat prouvé à la question précédente; donc $z = 0$. En particulier, les vecteurs x et y sont colinéaires. Comme ils peuvent être choisis arbitrairement dans le sous-espace propre associé à λ , c'est que ce dernier est de dimension 1.

$$\boxed{\forall \lambda \in \sigma(T_0) \quad \dim \text{Ker}(T_0 - \lambda I) = 1}$$

Par ailleurs, la matrice T_0 étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, ce qui signifie que $\mathbb{R}^m$ est somme directe des sous-espaces propres de T_0

$$\mathbb{R}^m = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T_0)} \text{Ker}(T_0 - \lambda I)$$

En passant aux dimensions et en utilisant le résultat précédent, cela donne

$$m = \sum_{\lambda \in \sigma(T_0)} \dim \text{Ker}(T_0 - \lambda I) = \sum_{\lambda \in \sigma(T_0)} 1 = \text{Card } \sigma(T_0)$$

soit

$$\boxed{\text{Card } \sigma(T_0) = m}$$