

II. INÉGALITÉ DE KANTOROVITCH

9 Puisque $A^{-1/2}$ est symétrique, on a

$$(A^{1/2}X | A^{-1/2}X) = (A^{-1/2}A^{1/2}X | X) = (X | X)$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (A^{1/2}X | A^{-1/2}X)^2 &\leq (A^{1/2}X | A^{1/2}X) (A^{-1/2}X | A^{-1/2}X) \\ &\leq (AX | X) (A^{-1}X | X) \end{aligned}$$

donc

$$(X | X)^2 \leq (AX | X) (A^{-1}X | X) \quad (2)$$

Avec des techniques similaires, on montre que

$$(X | Y) \leq (AX | Y) (A^{-1}X | Y)$$

10 Si l'inégalité précédente est une égalité, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs $A^{-1/2}X$ et $A^{1/2}X$ sont colinéaires pour tout X . On en déduit que pour toute matrice colonne X , il existe un réel λ_X , a priori dépendant de X , tel que

$$A^{1/2}X = \lambda_X A^{-1/2}X$$

En multipliant par $A^{1/2}$ à gauche, on en déduit

$$AX = \lambda_X X$$

On va montrer que λ est indépendant de X . Si X et Y sont deux vecteurs linéairement indépendants, on a

$$A_{X+Y} = AX + AY$$

$$\lambda_{X+Y} (X + Y) = \lambda_X X + \lambda_Y Y$$

$$(\lambda_{X+Y} - \lambda_X) X + (\lambda_{X+Y} - \lambda_Y) Y = 0$$

Les vecteurs étant indépendants, les coefficients devant X et Y sont nécessairement nuls et on en déduit

$$\lambda_X = \lambda_{X+Y} = \lambda_Y$$

Si X et Y sont deux vecteurs non nuls linéairement dépendants, il existe un réel non nul α tel que $X = \alpha Y$. D'où

$$AX = \alpha AY$$

$$\lambda_X \alpha Y = \alpha \lambda_Y Y$$

et donc

$$\lambda_X = \lambda_Y$$

λ est en fait une constante et $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}_n$.

On peut également traiter le cas des vecteurs colinéaires en utilisant celui des vecteurs non colinéaires :

- Pour $n > 1$, il existe un vecteur Z tel que (X, Z) et (Y, Z) soient des couples de vecteurs indépendants. On a alors

$$\lambda_X = \lambda_Z = \lambda_Y$$

et on conclut de même que λ est une constante.

- Pour $n = 1$, $\lambda_X = \lambda$ car les seules applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension 1 sont les homothéties.

Réciproquement, si $A = \lambda I_n$, alors

$$(AX | X) = \lambda \|X\|^2$$

et

$$(A^{-1}X | X) = \frac{1}{\lambda} \|X\|^2$$

donc l'inégalité (2) est bien une **égalité** dans ce cas.

Les matrices pour lesquelles l'inégalité (2) est une égalité sont les matrices scalaires.

11 On a

$$F(A) = A^2 - (m + M)A + mM I_n$$

Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, alors

$$AX = \lambda X \quad \text{donc} \quad A^2X = \lambda^2 X$$

ce qui entraîne

$$(A^2 - (m + M)A + mM I_n)X = (\lambda^2 - (m + M)\lambda + mM)X$$

Donc λ valeur propre de A implique que **$F(\lambda)$ est valeur propre de $F(A)$** .

Pour la réciproque, observons que les vecteurs propres associés à la valeur propre λ pour A et $F(\lambda)$ pour $F(A)$ sont les mêmes. A est diagonalisable car symétrique réelle, donc il existe une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (distinctes ou confondues). Cette même base est base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $F(\lambda_1), \dots, F(\lambda_n)$, également distinctes ou confondues. On a une base de vecteurs propres, donc on a **toutes les valeurs propres** de la matrice $F(A)$.

Les valeurs propres de $F(A)$ sont toutes de la forme $F(\lambda)$, avec λ valeur propre de A .

12 On a

$$F(s) = (s - m)(s - M)$$

donc F a pour racines m et M . $F(s)$ est donc un réel négatif ou nul pour tout s appartenant à l'intervalle $[m; M]$. Toutes les valeurs propres λ_i de A appartenant à cet intervalle, tous les réels $F(\lambda_i)$ sont négatifs ou nuls.

Les valeurs propres de $F(A)$ sont négatives ou nulles.

13 La matrice N , définie par

$$N = -(A - (m + M)I_n + mM A^{-1})$$

est une combinaison linéaire de matrices symétriques, donc est elle-même symétrique.

Par un calcul direct, on a que $NA = AN$, donc

$${}^tNA = {}^tA {}^tN = AN = NA$$

et NA est une matrice symétrique.

Comme $NA = -F(A)$, ses valeurs propres sont positives ou nulles, ce qui montre que NA est une matrice symétrique positive d'après la question 1. Comme on l'a vu

à la question 8, le fait que N et A commutent implique qu'elles sont simultanément diagonalisables. Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$P^{-1}NP = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

et

$$P^{-1}NAP = \text{Diag}(\alpha_1\lambda_1, \dots, \alpha_n\lambda_n)$$

Les produits $\alpha_i\lambda_i$ sont positifs puisque NA est symétrique positive, les réels λ_i sont strictement positifs puisque A est symétrique définie positive, donc les réels α_i sont positifs et il découle de la question 1 que la matrice N est positive. Ainsi,

La matrice N est symétrique positive.

On aurait aussi pu voir directement que $N = A^{-1}F(A)$, donc

$$N = P \begin{pmatrix} -\frac{F(\lambda_1)}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F(\lambda_n)}{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP$$

Puisque les λ_i sont tous strictement positifs et les $F(\lambda_i)$ tous négatifs (voir question 12), les valeurs propres de N sont toutes positives et N est positive.

De plus, comme P est une matrice orthogonale, on a

$${}^tN = {}^t({}^tP \text{Diag}\left(\frac{F(\lambda_1)}{\lambda_1}, \dots, \frac{F(\lambda_n)}{\lambda_n}\right) {}^tP) = N$$

et N est symétrique.

14 On a

$$f(0) = mM(A^{-1}X | X)$$

qui est un réel positif puisque A^{-1} est, comme A , une matrice symétrique définie positive. On remarque que

$$-(NX | X) = (AX | X) - (m + M)(X | X) + mM(A^{-1}X | X) = f(1)$$

qui est un réel négatif puisque d'après la question précédente N est une matrice symétrique positive. Par conséquent

$$f(0)f(1) \leq 0$$

15 La fonction f est un polynôme donc elle est en particulier continue. Elle est strictement positive en 0 et négative ou nulle en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois sur $]0; 1]$. $f(s) = 0$ est une équation du second degré qui admet une racine réelle au moins, il s'ensuit que son discriminant est positif ou nul, c'est-à-dire

$$(m + M)^2 (X | X)^2 - 4mM (AX | X) (A^{-1}X | X) \geq 0$$

En notant que $4mM$ est un réel strictement positif, on obtient bien

$$(AX | X) (A^{-1}X | X) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM} (X | X)^2 \quad (3)$$

16 Calculons

$$\frac{(m+M)^2}{mM} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} = \frac{\lambda_1 \lambda_n (m+M)^2 - mM (\lambda_1 + \lambda_n)^2}{mM \lambda_1 \lambda_n}$$

qui est du signe de

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_n (m+M)^2 - mM (\lambda_1 + \lambda_n)^2 &= \lambda_1 \lambda_n (m^2 + 2mM + M^2) \\ &\quad - mM (\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_n + \lambda_n^2) \\ &= \lambda_1 \lambda_n (m^2 + M^2) - mM (\lambda_1^2 + \lambda_n^2) \\ &= \lambda_1 \lambda_n m^2 - mM \lambda_n^2 + \lambda_1 \lambda_n M^2 - mM \lambda_1^2 \\ &= \lambda_n m (\lambda_1 m - \lambda_n M) + \lambda_1 M (\lambda_n M - \lambda_1 m) \\ \lambda_1 \lambda_n (m+M)^2 - mM (\lambda_1 + \lambda_n)^2 &= (\lambda_1 M - \lambda_n m) (\lambda_n M - \lambda_1 m) \end{aligned}$$

Comme à la fois $\begin{cases} \lambda_n \geq \lambda_1 > 0 \\ M \geq m > 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} M \geq \lambda_n > 0 \\ \lambda_1 \geq m > 0 \end{cases}$

on en déduit $\lambda_n M \geq \lambda_1 m$ et $\lambda_1 M \geq \lambda_n m$

Par conséquent, $\forall (m, M) \in \mathcal{D} \quad \frac{(m+M)^2}{mM} \geq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$

Il y a égalité si $m = \lambda_1$ et $M = \lambda_n$, d'où

$$\inf_{\mathcal{D}} \frac{(m+M)^2}{mM} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$$

17 A n'étant pas une homothétie, λ_1 est différent de λ_n . X_1 et X_n sont alors des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique. On sait que de tels vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire que $(X_1 | X_n) = 0$. Par ailleurs, n'oublions pas que par hypothèse $\|X_1\| = \|X_n\| = 1$ et calculons

$$\begin{aligned} (AX | X) (A^{-1}X | X) &= (\lambda_1 X_1 + \lambda_n X_n | X_1 + X_n) \left(\frac{1}{\lambda_1} X_1 + \frac{1}{\lambda_n} X_n \middle| X_1 + X_n \right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_n) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n} \right) \\ (AX | X) (A^{-1}X | X) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} \end{aligned}$$

D'autre part $(X | X) = \|X_1\|^2 + \|X_n\|^2 = 2$ d'où $(X | X)^2 = 4$

Par conséquent,
$$(AX | X) (A^{-1}X | X) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4 \lambda_1 \lambda_n} (X | X)^2$$

18 L'inégalité de la question 16 donne, en passant à la borne inférieure sur m et M ,

$$(AX | X) (A^{-1}X | X) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4 \lambda_1 \lambda_n} (X | X)^2$$

On a vu à la question précédente qu'il existe au moins un vecteur pour lequel l'inégalité est une égalité. Ainsi,

L'inégalité (3) est la meilleur possible, il n'existe pas d'inégalité plus fine.