

Mines Maths 1 PC 2007 — Corrigé

I. PRÉLIMINAIRES

1 Soient $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$. Rappelons la formule définissant le produit matriciel : MN appartient à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket \quad (MN)(i, j) = \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j)$$

Donc
$$\|MN\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |(MN)(i, j)| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j) \right|$$

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad \left| \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j) \right| \leq \sum_{k=1}^r |M(i, k)| |N(k, j)|$$

d'où
$$\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j) \right| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r |M(i, k)| |N(k, j)|$$

Commençons par intervertir ces deux sommes finies :

$$\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j) \right| \leq \sum_{k=1}^r \underbrace{\sum_{j=1}^m |M(i, k)| |N(k, j)|}_{(\mathbf{S})}$$

Dans la somme $(\mathbf{S})$, les termes $M(i, k)$ sont indépendants de l'indice de sommation, qui est j , ce qui permet de les mettre en facteur :

$$\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j) \right| \leq \sum_{k=1}^r |M(i, k)| \sum_{j=1}^m |N(k, j)|$$

Puis, par définition de $\|N\|$, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \sum_{j=1}^m |N(k, j)| \leq \|N\|$$

d'où
$$\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k) N(k, j) \right| \leq \|N\| \sum_{k=1}^r |M(i, k)| \leq \|N\| \|M\|$$

Cette inégalité est valable pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On conclut donc

$$\boxed{\|MN\| \leq \|M\| \|N\|}$$

2 P est une matrice stochastique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ce qui signifie que $PJ_n = J_n$. Autrement dit, puisque J_n est la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (PJ_n)(i, 1) = 1$$

En exprimant le terme général de PJ_n à l'aide de la définition du produit matriciel,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{k=1}^n P(i, k) = 1$$

P est positive donc chacun de ses coefficients est positif, égal à sa valeur absolue, d'où

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{k=1}^n |P(i, k)| = 1$$

Par suite,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^r |P(i, k)| = 1$$

Autrement dit,

$$\|P\| = 1$$

3 On définit, pour tout entier k non nul, la propriété $\mathcal{Q}(k)$: « P^k est une matrice stochastique. »

- $\mathcal{Q}(1)$ est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{Q}(k) \implies \mathcal{Q}(k+1)$: P^k et P sont stochastiques. Alors

$$P^{k+1}J_n = P^k(PJ_n) = P^kJ_n = J_n$$

En outre, d'après la formule définissant le produit matriciel, les coefficients de P^{k+1} sont des sommes de produits de coefficients de P et P^k . Ces deux matrices étant à coefficients positifs, P^{k+1} est également à coefficients positifs. C'est donc une matrice stochastique et $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{Q}(k)$ est vraie pour tout entier k non nul.

Pour tout entier k non nul, P^k est stochastique.

II. PSEUDO-INVERSE

4 Supposons que A admet un pseudo-inverse A' . Notons a' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A' . Les relations matricielles entre A et A' se traduisent en termes d'endomorphismes de la manière suivante :

$$aa' = a'a \quad a = aa'a \quad \text{et} \quad a' = a'aa'$$

Rappelons la relation suivante, triviale, qui peut être considérée comme du cours : si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E , alors $\text{Im}(fg) \subset \text{Im} f$. Cela tient simplement au fait que

$$\text{Im}(fg) = fg(E) = f(g(E)) \subset f(E) = \text{Im} f$$

Si E est, de plus, de dimension finie, on a $\text{rang}(fg) \leq \text{rang} f$ puisque le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Les deux premières relations donnent $a = a^2a'$. D'après la formule rappelée en remarque, $\text{rang} a = \text{rang}(a^2a') \leq \text{rang} a^2$. Mais on a aussi $a^2 = a \circ a$ donc, toujours d'après cette formule, $\text{rang} a^2 \leq \text{rang} a$. Par suite,

Si A admet un pseudo-inverse, alors a et a^2 ont le même rang.

5 Observons d'abord que $\text{Im } a = \text{Im } a^2$. En effet, l'inclusion $\text{Im } a^2 \subset \text{Im } a$ est triviale ; de plus, d'après la question précédente, ces deux sous-espaces ont la même dimension, à savoir $\text{rg } a$.

Maintenant, soit $y \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $a(y)$ appartient à $\text{Im } a$, qui est égal à $\text{Im } a^2$ comme on vient de le voir. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $a(y) = a^2(x)$, et on a

$$0 = a(y) - a^2(x) = a(y - a(x))$$

Autrement dit, $y - a(x)$ appartient à $\text{Ker } a$. On peut alors écrire

$$y = \underbrace{y - a(x)}_{\in \text{Ker } a} + \underbrace{a(x)}_{\in \text{Im } a}$$

ce qui montre que

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } a + \text{Im } a$$

De plus,

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } a + \dim \text{Im } a$$

d'après le théorème du rang. Ces deux relations impliquent ensemble que $\text{Ker } a$ et $\text{Im } a$ sont en somme directe. D'où

$$\boxed{\text{Ker } a \oplus \text{Im } a = \mathbb{R}^n}$$

6 Donnons-nous une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im } a$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker } a$.

En effet, $\text{rang } a = r$ donc $\text{Im } a$ est de dimension r : ses bases sont de cardinal r .
De plus, $\text{Ker } a$ est de dimension $n - r$ d'après le théorème du rang : ses bases sont de cardinal $n - r$.

Ainsi, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, puisque $\text{Im } a$ et $\text{Ker } a$ sont supplémentaires d'après la question 5. Notons M la matrice de a dans cette base. Notant W la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, on a $A = WMW^{-1}$.

Par définition du noyau de a ,

$$\forall i \in \llbracket r+1 ; n \rrbracket \quad a(e_i) = 0$$

Les $n - r$ dernières colonnes de M sont donc nulles. Et par définition de l'image de a ,

$$\forall i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket \quad a(e_i) \in \text{Im } a = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$

Par conséquent, les $n - r$ dernières lignes de M sont nulles. Ainsi, M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$$

Comme le rang de M est la dimension du sous-espace engendré par ses colonnes, M et B ont même rang. Mais rappelons que $A = WMW^{-1}$; W et W^{-1} étant inversibles, A et M ont aussi même rang. D'où

$$r = \text{rang } A = \text{rang } M = \text{rang } B$$

B est donc inversible, puisque carrée et de même rang que sa taille.

Il existe $B \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, inversibles, telles que

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

7 Posons

$$A' = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

où les matrices W et B sont celles que nous avons trouvées à la question 6. En utilisant les règles de calcul avec les matrices par blocs, on constate que

$$AA' = A'A = W \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

$$AA'A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} = A$$

et

$$A'AA' = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} = A'$$

Finalement, si $\text{rang } A = \text{rang } A^2$, la matrice A admet un pseudo-inverse.

8 Rappelons que les relations (1), (2) et (3) entre A et A' se traduisent en

$$\underbrace{aa' = a'a}_{(1')} \quad \underbrace{a = aa'a}_{(2')} \quad \text{et} \quad \underbrace{a' = a'aa'}_{(3')}$$

D'après le cours, comme a et a' commutent,

$$\boxed{\text{Ker } a \text{ et Im } a \text{ sont stables par } a' .}$$

L'existence d'un pseudo-inverse pour A implique, d'après la question 4, que a et a' ont même rang. Puis, la question 5 nous dit que $\text{Ker } a$ et $\text{Im } a$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. On conserve les notations de la question 6 : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^n = \text{Im } a \oplus \text{Ker } a$ et W est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. Notons N la matrice de a' relativement à $\mathcal{B}$, de sorte que $A' = WNW^{-1}$, et construisons N .

D'après les relations (1') et (3'),

$$\forall i \in \llbracket r+1 ; n \rrbracket \quad a'(e_i) = a'aa'(e_i) = a'^2a(e_i) = 0$$

Les $n - r$ dernières colonnes de N sont donc nulles. Et comme $\text{Im } a$ est stable par a' ,

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \quad a'(e_i) \in \text{Im } a = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$

Les $n - r$ dernières lignes de N sont nulles. Par suite, N admet l'écriture par blocs

$$N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R}) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\text{Il existe } D \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R}) \text{ telle que } A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} .}$$

9 En utilisant la relation (3') et l'associativité de la composition

$$(aa')^2 = (aa')(aa') = a(a'aa') = aa'$$

donc

$$\boxed{aa' \text{ est un projecteur.}}$$

On a $\text{Ker } a \subset \text{Ker } (aa')$ puisque si $a(x) = 0$ alors $aa'(x) = a'a(x) = 0$. Réciproquement, si x appartient à $\text{Ker } (aa')$, on a d'après la relation (2')

$$a(x) = aa'a(x) = a(aa'(x)) = 0$$

et x appartient à $\text{Ker } a$. Donc

$$\boxed{\text{Ker}(aa') = \text{Ker } a}$$

Le théorème du rang assure que

$$\dim \text{Ker } a + \dim \text{Im } a = n \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(aa') + \dim \text{Im}(aa') = n$$

Comme $\text{Ker}(aa')$ et $\text{Ker } a$ ont la même dimension — on vient de voir qu'ils sont égaux, il s'ensuit que $\text{Im}(aa')$ et $\text{Im } a$ ont aussi la même dimension. En combinant ceci avec l'inclusion $\text{Im}(aa') \subset \text{Im } a$, rappelée en remarque à la question 4, on obtient

$$\boxed{\text{Im}(aa') = \text{Im } a}$$

On vient de démontrer que aa' est la projection sur $\text{Im } a$ parallèlement à $\text{Ker } a$. En d'autres termes, aa' agit comme l'identité sur $\text{Im } a$ et annule les éléments de $\text{Ker } a$. La matrice de aa' dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les formules de changement de base assurent alors que

$$\boxed{AA' = W \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} \quad \text{ou aussi} \quad W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

10 D'après la question 9, on a

$$W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais en utilisant les règles de multiplication des matrices par blocs et les expressions de A et A' obtenues aux questions 6 et 8, on trouve aussi

$$W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} BD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$BD = I_r$$

Or, on sait que B est inversible donc $D = B^{-1}$, ce qui montre que A' est déterminé de manière unique.

On retrouve d'ailleurs la matrice exhibée à la question 7 dans le but de montrer que A admet des pseudo-inverses.

$$\boxed{A \text{ admet un et un seul pseudo-inverse.}}$$