



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2019

4 heures

Calculatrice autorisée

Le sujet est composée de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment à la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A – Dérivées successives

Q 1. Exprimer les dérivées f' , f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0 , P_1 , P_2 , P_3 et, pour tout entier naturel n , on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

Q 3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

Q 4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n , on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

Q 5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

III Permutations alternantes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une liste de n nombres réels. On dit que la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Autrement dit, la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \dots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation σ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation σ par la liste des images $(\sigma(1), \dots, \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

III.A – Dénombrement des permutations alternantes

Q 32. Déterminer les permutations alternantes montantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n = 2, n = 3, n = 4$.

Q 33. Montrer, pour tout $n \geq 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geq 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

Q 34. Soient k et n deux entiers tels que $2 \leq k \leq n$ et A une partie à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère les listes $(x_1, \dots, x_k)$ constituées de k éléments deux à deux distincts de A . Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k .

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

Q 35. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, $2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$.

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, dénombrer les permutations σ alternantes (montantes ou descendantes) de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.

Q 36. En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.