

Dans tout le chapitre, on considère des fonctions d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{K}$ . On notera comme de coutume

- $\mathcal{B}(I, \mathbb{K}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ bornées}\}$ .
- $\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$
- Si maintenant  $J$  est un intervalle  $J$  inclus dans  $I$ , on notera  $\|f\|_{\infty, J} = \sup_{x \in J} |f(x)|$

# 1 Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

## 1.1 Convergence simple

### Définition 1

On dit que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  si pour tout  $x \in I$ , la suite de réels  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ . On note alors  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{s} f$ .

### Remarque 1

Si une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement, sa limite est unique et est donnée par

$$f : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

### Définition 2

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions. On dit que la série de fonction  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ , la série  $\sum f_n(x)$  est convergente. Dans ce cas, on appelle somme de la série l'application

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

### Remarque 2

La convergence simple de la série équivaut donc à la convergence simple de la suite des sommes partielles.

### Exemple 1

- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'application de  $[0; 1]$  dans lui-même définies par  $f_n : x \mapsto x^n$  converge simplement vers

$$\begin{aligned} f : [0; 1] &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- Soit  $f$  continue, constante égale à 0 (resp. 1) sur  $]-\infty; -1]$  (resp. sur  $[1; +\infty[$ ), et affine sur  $[-1; 1]$ . On pose pour tout entier  $n$

$$g_n : x \mapsto f(x+n) \quad \text{et} \quad h_n : x \mapsto f(x-n)$$

Alors  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction constante égale à 1 (resp. la fonction nulle).

- La série de fonction  $\sum_{n \geq 1} f_n$  où  $f_n : x \mapsto 1/n^x$  converge simplement sur  $]1; +\infty[$ .

## 1.2 Convergence uniforme

### Définition 3

On dit que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  si on a la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

On note alors  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{u} f$ .

Une série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément par définition si la suite de ses sommes partielles converge uniformément.

### Remarque 3

La convergence simple d'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions vers  $f$  s'écrit

$$\forall x \in I, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

La définition de la convergence uniforme s'obtient en inversant l'ordre de certains quantificateurs,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Avec cette nouvelle définition, le rang  $N$  à partir duquel la majoration est valide ne dépend plus ici que de  $\epsilon$  et il est notamment indépendant de  $x$ .

### Proposition 1

- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  si et seulement si il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n - f$  est bornée pour  $n \geq N$  avec  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- La convergence uniforme d'une suite (resp. série) de fonctions implique sa convergence simple et la limite (resp. somme) est inchangée.

### Exemple 2

- Pour la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $f_n : x \mapsto x^n$ , la convergence n'est pas uniforme car  $\|f_n - (\lim f_n)\|_\infty = 1$  pour tout entier  $n$ .
- La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  avec  $f_n : x \mapsto 1/n^x$  ne converge pas uniformément sur  $]1; +\infty[$  car pour tout entier  $n$ , le reste  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$  n'est pas une fonction bornée sur  $]1; +\infty[$ .

### Remarque 4

Pour déterminer la nature de la convergence d'une suite, on peut donc

- Vérifier si pour tout  $x$ ,  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge, auquel cas on note  $f(x)$  sa limite et on a convergence simple,
- Déterminer ou majorer  $\|f_n - f\|_\infty$  et vérifier si cette quantité tend vers 0, auquel cas on a en plus convergence uniforme.

Pour les séries de fonctions, on utilise en général plutôt la notion de convergence normale pour démontrer la convergence uniforme.

### Exercice 1 (Mines)

On pose  $f_n : x \mapsto e^{-nx} - (1 - x)^n$ . Etudier la convergence uniforme sur  $[0; 1]$ .

### 1.3 Convergence normale des séries de fonctions

#### Définition 4

On dit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si

- Pour tout entier  $n$ ,  $f_n$  est bornée sur  $I$ .
- La série à termes positifs  $\sum \|f_n\|_\infty$  est convergente.

#### Proposition 2

Toute série de fonctions normalement convergente est uniformément, et donc simplement convergente.

#### Remarque 5

La réciproque est fausse (la convergence simple n'assure même pas le fait que chacune des  $f_n$  soit bornée). Il suffit de considérer par exemple  $\sum f_n$  avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : ]0; 1[ \longrightarrow ]0; 1[ \\ x \longmapsto x^n$$

#### Proposition 3

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions avec  $f_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$  pour tout  $n$ .

- S'il existe une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  positive telle que la série  $\sum v_n$  converge et telle que  $\|f_n\|_\infty \leq v_n$  pour tout  $n$ , alors la série  $\sum f_n$  est normalement convergente.
- S'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\sum |f_n(x_n)|$  diverge, alors la série  $\sum f_n$  n'est pas normalement convergente.

#### Exemple 3

La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  avec  $f_n : x \mapsto 1/n^x$  ne converge pas normalement sur  $]1; +\infty[$  car  $\|f_n\|_{\infty, ]1; +\infty[}$  est égal à  $1/n$  qui est le terme général d'une série divergente. En revanche, on a convergence normale (donc uniforme) sur tout intervalle de la forme  $[a; +\infty[$  avec  $a > 1$ .

#### Exercice 2

Etudier la convergence de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} x^2 \exp(-x\sqrt{n})$ .

## 2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

#### Théorème 1 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Si une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues sur  $I$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

#### Remarque 6

- Le résultat reste conservé si on suppose seulement que la convergence est uniforme sur tout segment de  $I$  (ou sur n'importe quelle famille d'intervalles qui recouvre  $I$ ).
- Le résultat est faux si l'on suppose seulement la convergence simple, comme le montre l'exemple  $f_n : x \mapsto x^n$  sur  $[0; 1]$  (la limite n'est pas continue en 1). Sur l'intervalle  $[0; 1[$  cependant, le résultat s'applique sur tous les segments et assure la continuité de la limite.

**Théorème 2 (Interversion limite-intégrale sur un segment)**

Si une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues sur un segment  $[a; b]$  converge uniformément vers une fonction  $f$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**Remarque 7 (Suite de Dirac)**

Le résultat devient faux si on suppose seulement la convergence simple. Le contre-exemple classique est celui d'un pic de Dirac par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0; 1/n] \\ n^2(2/n - x) & \text{si } x \in [1/n; 2/n] \\ 0 & \text{si } x > 2/n \end{cases}$$

Alors,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle mais pas uniformément, mais l'intégrale de  $f_n$  ne tend pas vers 0 car elle est constante égale à 1.

**Exercice 3**

Montrer que pour toute fonction  $g$  continue sur  $[0; 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) g(t) dt = g(0)$$

**Théorème 3 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions)**

Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  qui converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ , et telle que la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f' = g$ .

**Corollaire 1 (Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ )**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  avec  $k \geq 1$ . On suppose que

- Pour tout  $j \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une fonction  $g_j$ .
- La suite  $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $g_k$ .

Alors, la limite  $g_0$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et pour tout  $j \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $g_0^{(j)} = g_j$ .

**Remarque 8**

- En d'autres termes, les dérivées de la limite sont égales aux limites des dérivées.
- Le résultat reste là aussi conservé si on suppose seulement la convergence uniforme sur tout segment (ou sur n'importe quelle famille d'intervalles qui recouvre  $I$ ) de la suite des dérivées  $k$ -ièmes.

### 3 Régularité de la somme d'une série de fonctions

**Théorème 4 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur  $I$  qui converge uniformément sur  $I$ . Alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $I$ .

## Remarque 9

- Le résultat reste là aussi conservé si on suppose seulement la convergence uniforme sur tout segment (ou sur n'importe quelle famille d'intervalles qui recouvre  $I$ ) de la série.
- La convergence normale de  $\sum f_n$  implique la convergence uniforme sur  $I$  et donc la continuité de la somme à nouveau si les  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues.
- Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de fonctions positives et qui converge simplement vers 0, alors  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$  converge simplement sur  $I$  par CSA. Dans la plupart des cas, la majoration des restes d'une série alternée permet également d'obtenir la convergence uniforme.

## Exemple 4

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : x \mapsto x^n/n!$ . La série de fonctions continues  $\sum f_n$  est normalement convergente sur tout segment de  $\mathbb{R}$  donc la somme est continue.

On remarquera notamment qu'aucune des fonctions  $f_n$  n'est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 4

Etudier la convergence et la continuité de la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  avec

$$(1) \quad f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2} \qquad (2) \quad f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$$

## Théorème 5 (Théorème de la double limite)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $I$  et  $a$  une borne de  $I$  (éventuellement infinie). On suppose que

- Pour tout entier  $n$ ,  $f_n$  a une limite finie  $\ell_n$  en  $a$ .
- La série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors la série  $\sum \ell_n$  converge et

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) (x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

## Remarque 10

- Attention, on ne peut pas ici se contenter de vérifier la convergence uniforme sur les segments de  $I$ . Le résultat est faux **même** en cas de convergence normale sur tout segment de  $I$ . Il suffit de considérer par exemple  $\sum f_n$  avec

$$f_n : [0; 1[ \longrightarrow [0; 1[ \\ x \mapsto x^n(1-x)$$

On peut néanmoins restreindre l'étude à un sous-intervalle  $J$  de  $I$  du moment que celui-ci a également  $a$  comme borne.

- Le nom officiel du théorème est emprunté à la même version du théorème pour les suites de fonctions (qui est similaire, mais pas au programme de PC). Il eût été plus judicieux de le nommer « interversion somme/limite ».

## Exercice 5

On note

$$F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

Justifier les équivalents

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln x \quad \text{et} \quad F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{x^2}$$

## Théorème 6 (Intégration terme à terme sur un segment)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues qui converge uniformément sur un segment  $[a; b]$ . Alors, la série

$\sum \int_a^b f_n(t) dt$  converge et l'on a

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

## Remarque 11

Le résultat est à nouveau faux sans l'hypothèse de convergence uniforme. Il suffit de prendre une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Dirac et de poser  $g_0 = f_0$  puis  $g_n = f_n - f_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

## Exemple 5 (Version (très) simplifiée du théorème des résidus)

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|z_0| \neq r$ . Alors,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z_0 - r e^{i\theta}} = \begin{cases} 2\pi/z_0 & \text{si } r < |z_0| \\ 0 & \text{si } r > |z_0| \end{cases}$$

## Théorème 7 (Théorème de dérivation terme à terme)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions avec  $f_n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  pour tout entier  $n$ . On fait les hypothèses suivantes :

- La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .
- La série  $\sum f_n'$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Corollaire 2 (Extension aux séries de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ )

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\sum f_n$  une série de fonctions avec  $f_n$  de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout entier  $n$ . On suppose que

- Pour tout  $p \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$ , la série  $\sum f_n^{(p)}$  converge simplement sur  $I$ .
- La série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et pour tout  $p \in \llbracket 1; k \rrbracket$ ,

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$$

## Remarque 12

Le résultat reste là aussi conservé si on suppose seulement la convergence uniforme sur tout segment (ou sur n'importe quelle famille d'intervalles qui recouvre  $I$ ) de la série  $\sum f_n^{(k)}$ .

Exemple 6 (Fonction  $\zeta$  de Riemann)

L'application  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1; +\infty[$  et de limite 1 en  $+\infty$ .

## Exercice 6 (Mines)

- Retour sur  $f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ . La somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  ?
- Montrer que  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; +\infty[$ .