

II Propriétés de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$

- La lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- On note $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.
- On note respectivement $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $GL(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ formé des matrices diagonales.
- On désigne par $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ de trace nulle.
- On note I_n la matrice identité et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.
- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $A^r = 0$. De la même manière, on dit qu'un endomorphisme f est *nilpotent* s'il existe un entier naturel non nul r tel que $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{r \text{ fois}} = 0$.
- Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, le *crochet* $[A, B]$ est défini par $[A, B] = AB - BA$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \\ B &\longmapsto [A, B] \end{aligned}$$

- On dit qu'un triplet (X, H, Y) de trois matrices non nulles de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est un *triplet admissible* si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$[H, X] = 2X \quad ; \quad [X, Y] = H \quad ; \quad [H, Y] = -2Y$$

On pose :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

II.A – Généralités

II.A.1) Montrer que $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ; en préciser la dimension.

II.A.2) Justifier que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, la matrice $[A, B]$ appartient à $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$.

II.B – Un isomorphisme

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} j : \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

II.C – Caractérisation des matrices nilpotentes

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La matrice A est nilpotente ;
- Le spectre de A est égal à $\{0\}$;
- La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.D – Le cas complexe

On suppose dans cette question que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{C}$.

II.D.1) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.D.2) Ce résultat reste-t-il vrai pour deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{C})$, avec $n \geq 3$?

II.E – Le cas réel

On suppose dans cette question que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$.

II.E.1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$. On suppose que son polynôme caractéristique vaut $X^2 + r^2$, où r est un réel non nul.

a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL(2, \mathbb{C})$ vérifiant : $irH_0 = P^{-1}AP$. Que vaut la matrice $A^2 + r^2I_2$?

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé* à la matrice A , c'est-à-dire qui à un vecteur colonne u de $\mathbb{R}^2$ associe le vecteur Au . Soit w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Prouver que la famille $(\frac{1}{r}f(w), w)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et donner la matrice de f dans cette base.

II.E.2) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

II.F – Un lemme

Soient A , B et M trois éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

II.F.1) Exprimer la trace de la matrice M^2 en fonction du déterminant de M .

II.F.2) Démontrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si la trace de la matrice M^2 est nulle.

II.F.3) On suppose que les matrices A et $[A, B]$ commutent.

Démontrer que la matrice $[A, B]$ est nilpotente.

II.G – Description des triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$

II.G.1) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 . Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 ?

II.G.2) Soit P une matrice de $GL(2, \mathbb{K})$. Vérifier que $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible.

On se propose de démontrer que, réciproquement, tous les triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ sont de cette forme.

Pour toute la suite de la question II.G, soient X, H, Y trois éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ tels que (X, H, Y) forme un triplet admissible.

II.G.3) Montrer en utilisant les questions II.F et II.C qu'il existe une matrice $Q \in GL(2, \mathbb{K})$ vérifiant $X = QX_0Q^{-1}$.

On fixe pour la suite de la question II.G une telle matrice $Q \in GL(2, \mathbb{K})$.

II.G.4) On définit les vecteurs $u = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) En calculant le vecteur $[H, X]u$ de deux manières différentes, démontrer que u est un vecteur propre de la matrice H .

b) En calculant le vecteur $[H, X]v$ de deux manières différentes, prouver l'existence d'un scalaire t vérifiant l'identité : $H = Q \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

c) Trouver une matrice $T \in GL(2, \mathbb{K})$ commutant avec X_0 et vérifiant la relation $H = QTH_0(QT)^{-1}$.

On pose désormais $P = QT$.

II.G.5) Soit $Y' \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ telle que (X, H, Y') soit un triplet admissible.

a) Dédire de la question II.G.1 les matrices de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X .

b) Calculer les matrices $\Phi_X(Y - Y')$ et $\Phi_H(Y - Y')$.

c) En déduire que l'on a $Y' = Y$.

II.G.6) Démontrer l'identité $(X, H, Y) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$.