1 ——— $(*)$ ———

Etudier la convergence quand $n \to +\infty$ et la limite éventuelle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Notons pour tout $n \geq 1$

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(x/n)}{1+x^2} \end{array}$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue et dominée au voisinage de $+\infty$ par $1/x^2$.
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout entier n, on a $|f_n| \leq f$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème s'applique et prouve que

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

soit $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$$

2 ——— $(*)$ ———

Etudier la convergence quand $n \to +\infty$ et la limite éventuelle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Notons pour tout $n \geq 1$

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)} \end{array}$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On rappelle que $u \longmapsto (\sin u)/u$ est prolongeable par continuité en 0 par 1, et majorée (en valeur absolue) par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue, prolongeable par continuité en 0, et équivalente à n/x^3 en $+\infty$.
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout entier n, on a $|f_n| \leq f$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème s'applique et prouve que

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

soit $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$$

3 ——— $(**)$ ———

Etudier la convergence quand $n \to +\infty$ et la limite éventuelle de l'intégrale

$$\int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}x$$

Notons pour tout $n \geq 1$

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \cos x & \text{si } x \in [0;n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue et nulle à partir d'un certain rang.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $n \geq x$ à partir d'un certain rang et alors

$$f_n(x) = e^{n\ln(1-x/n)}\cos x = e^{-x+o(1)}\cos x \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}\cos x$$

  Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $x \longmapsto e^{-x}\cos x$ continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Par concavité de la fonction ln, on a $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t > -1$, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in [0; n[\,, \qquad 0 \leq |f_n(x)| \leq e^{n\ln(1-x/n)} \leq e^{-x}$$

  Cette majoration reste bien entendu valable sur $[n; +\infty[$ et la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$. Pour calculer cette dernière rapidement, il suffit de passer par les complexes. En effet,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-1)x}\,\mathrm{d}x\right) = \Re\left[\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^{+\infty} = \Re\left(\frac{1}{1-i}\right)$$

et finalement
$$\boxed{\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}}$$

4 ——— (∗∗) ———

Soit $a > 0$. Etudier l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (a^2+x^2)^{-n} \end{array}$$

Pour tout n, l'application f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente à $1/x^{2n}$ au voisinage de $+\infty$. Par suite, elle est intégrale lorsque $n \geq 1$. Etudions maintenant la limite simple de la suite. On distingue plusieurs cas suivant la valeur de a.

- Si $a > 1$, alors $x^2 + a^2 > 1$ et $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$.
- Si $a = 1$, alors de même $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x > 0$ et $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Enfin si $a < 1$, la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ seulement si $a \geq 1$, auquel la limite simple est continue par morceaux et nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. En remarquant que f_1 majore f_n pour tout entier n, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que

$$\boxed{\text{Si } a \geq 1, \text{ alors } \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

Reste le cas $a < 1$ pour lequel on n'a ni convergence simple, ni domination de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fixons $b \in\,]a; 1[$. et utilisons la continuité de $f_1 : x \longmapsto 1/(a^2+x^2)$ en 0. Puisque $f_1(0) = 1/a^2 > 1/b^2$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0; \delta]\,, \qquad f_1(x) \geq \frac{1}{b^2}$$

puis
$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (f_1(x))^n\,\mathrm{d}x \geq \int_0^{\delta} (f_1(x))^n\,\mathrm{d}x \geq \int_0^{\delta}\frac{1}{b^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{b^{2n}}$$

Puisque l'on a pris $b < 1$, le terme de droite tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit par minoration que

$$\boxed{\text{Si } a < 1, \text{ alors } \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

5 ——— (∗) ———

Pour tout entier n, on pose
$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x^n} \end{array}$$

(a). Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b). A-t-on $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

(a). Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On distingue trois cas.

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x<1 \\ 1/(2e) & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite $\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+.}$

(b). Appliquons le théorème de convergence dominée.

- Pour tout entier n, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue et dominée par $x \longmapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$.
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue par morceaux.
- Pour tout entier n et tout $x \geq 0$, on a $|f_n(x)| \leq e^{-x}$, cette fonction de domination étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Au passage, la dite-limite est égale à $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ soit $1-e^{-1}$.

6 ——— (∗∗∗) ———

(a). Justifier l'existence et donner la valeur pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b). Justifier l'égalité $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n\right)$$

On prouvera l'existence de l'intégrale uniquement (pas la convergence de la suite).

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto (e^{-x}-e^{-nx})/x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0, et dominée par $1/x^2$ en $+\infty$. Elle est donc intégrable ce qui assure la convergence de l'intégrale.

Pour la calculer, fixons $\alpha, \beta > 0$. En séparant les intégrales puis en faisant un changement de variable affine, on obtient

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{n\alpha}^{n\beta}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{n\alpha}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\beta^{n\beta}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Lorsque β tend vers $+\infty$, on peut écrire grâce à l'intégrabilité de $x \longmapsto e^{-x}/x$ au voisinage de $+\infty$

$$\int_\beta^{n\beta}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\beta^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{n\beta}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0$$

Par ailleurs, on peut écrire lorsque x tend vers 0,

$$e^{-x} = 1-x+o(x) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} = -1+o(x)$$

Ainsi, l'application $x \longmapsto (e^{-x}-1)/x$ est bornée au voisinage de 0. On peut donc trouver $M \in \mathbb{R}_+$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in\,]0;\epsilon[\,, \qquad \left|\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x}\right| \leq M$$

d'où pour $x < \epsilon/n$, en intégrant entre α et $n\alpha$,

$$\left|\int_\alpha^{n\alpha}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^{n\alpha}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_\alpha^{n\alpha} M\,\mathrm{d}t = M(n-1)\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$$

Sachant que $\displaystyle\int_\alpha^{n\alpha}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n$, cela signifie que

$$\int_\alpha^{n\alpha} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \ln n$$

On en déduit la convergence de l'intégrale et sa valeur.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n}$$

(b) On va appliquer le théorème de convergence dominée à une suite de fonctions bien choisie. Remarquons pour cela que pour tout $x>0$,

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$$

Notons par conséquent pour tout entier $n \geq 1$,

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}\right) - \dfrac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} \end{array}$$

Vérifions les hypothèses du théorème.

- Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions intégrales (les exponentielles négatives, et la fonction de la question (a)).
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f : x \longmapsto e^{-x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}} - \dfrac{1}{x}\right)$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Ecrivons enfin que pour tout entier n,

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-nx}}{x} = f(x) + e^{-nx}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$$

d'où pour tout $n \geq 1$,
$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + \left|\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right|$$

On pourrait déterminer le signe de f et de la seconde quantité sous la valeur absolue, mais c'est inutile. La fonction de domination est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $1/x^2$ en $+\infty$. Elle est donc intégrable.

Finalement, le théorème s'applique et prouve que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$, on en déduit à l'aide de la valeur obtenue en (a) que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n\right)}$$

7 —— $(*)$ —— **PC X 2008**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0)=0$, $f'(0)=1$ et $f(x)\geq x$ pour tout x. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2 f(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Pour tout entier n, on note
$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{1+n^2 f(x)^2} \end{array}$$

L'application f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, et dominée par $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$ (en vertu de l'hypothèse $f(x)\geq x$ pour tout x). Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui permet pour $n\geq 1$ d'effectuer le changement de variable $u = nx$. Ainsi, $\mathrm{d}u = n\,\mathrm{d}x$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{n\,\mathrm{d}x}{1+n^2 f(x)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+n^2 f(u/n)^2}$$

Notons pour tout $n \geq 1$
$$g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1+n^2 f(u/n)^2} \end{array}$$

et appliquons le théorème de convergence dominée à cette nouvelle suite d'intégrales.

- Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le changement de variable précédent.
- Compte tenu des hypothèses sur f, on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1 en 0 et ainsi

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} t + o(t) \qquad \text{d'où} \qquad n^2 f(u/n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} u^2$$

  On a donc convergence simple de $(g_n)_{n\geq 1}$ vers $h : u \longmapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ continue.
- L'hypothèse $f(x) \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ implique immédiatement la majoration $0 \leq g_n \leq h$ pour tout entier n, où h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème s'applique et prouve que

$$\int_0^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

soit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2 f(x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$$

8 ——— (**) ———

On admet la version suivante du théorème de Fubini : si I et J sont deux segments de $\mathbb{R}$ et si $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_I \left(\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_J \left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

Soit $f : [a;b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a;b]\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad |f(x,t)| \leq g(t)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ et pour tout $x \in [a;b]$, on pose $H(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

(a). Montrer que F est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et que H est continue sur $[a;b]$.

(b). Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b H_n(x)\,\mathrm{d}x$ avec $H_n(x) = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Appliquons le théorème de continuité sous le signe somme pour établir la continuité de F.

- Pour tout réel x, l'application $t \longmapsto f(x,t)$ est continue, car f l'est.
- Pour tout réel t, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[a;b]$, car elle est continue sur ce segment.
- Enfin, pour tout segment $[c;d] \in \mathbb{R}$, et tout couple $(x,t) \in [a;b] \times [c;d]$,

$$|f(x,t)| \leq g(t) \leq \sup_{[c;d]} g$$

  cette dernière quantité étant constante, donc intégrable sur le segment $[a;b]$.

Le théorème de continuité sous le signe somme, avec domination locale s'applique et prouve que F est continue. Pour l'intégrabilité, il suffit de remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|F(t)| \leq \int_a^b |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t) = (b-a)g(t)$$

La fonction g étant intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de F par domination. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'application } F \text{ est continue et intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Appliquons le même théorème pour établir la continuité de H.

- Pour tout réel t, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est continue, car f l'est.
- Pour tout réel x, l'application $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car elle est dominée par hypothèse par g.
- Enfin, on dispose immédiatement d'une fonction de domination par l'hypothèse de l'énoncé.

Par suite,

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ est continue sur } [a;b].}$$

(b) Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'énoncé.

- On montre immédiatement comme pour la fonction H que pour tout entier n, H_n est continue. Elle est donc intégrable sur le segment $[a;b]$.
- Par définition, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$ vers la fonction H.
- Pour tout entier n et tout réel x, l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}_+$ permet d'écrire
$$|H_n(x)| \leq \int_{-n}^{n} |f(x,t)| \,\mathrm{d}t \leq \int_{-n}^{n} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$
sachant qu'une constante est toujours intégrable sur un segment.

Le théorème s'applique et prouve que $\displaystyle\int_a^b H_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x$

Remarquons maintenant qu'en vertu du théorème de Fubini, la fonction f étant continue
$$\int_a^b H_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{-n}^{n} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{-n}^{n}\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{-n}^{n} F(t)\,\mathrm{d}t$$

Le terme de droite admet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$ puisque F est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par unicité de la limite,
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x}$$

9 —————— (∗∗) —————— **Mines PC 2013**

On pose pour tout entier $n \geq 3$, $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$

Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 3$ et déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent simple de I_n.

Pour tout $n \geq 3$, on pose $\displaystyle f_n : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$

L'application f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et aux bornes de ce domaine de définition, on a les équivalents
$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n/2}} \qquad \text{et} \qquad f_n(x) \underset{x\to0^+}{\sim} x^{n/2}$$
Ces deux équivalents suffisent, d'après le critère de Riemann, à prouver l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,
$$\boxed{\text{La quantité } I_n \text{ est bien définie pour } n \geq 3.}$$
Appliquons maintenant le théorème de convergence dominée à la suite $(I_n)_{n\geq3}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On distingue trois cas :
  - si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1/\sqrt{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/\sqrt{2}$;
  - si $x > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/x^{n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
  - enfin si $x < 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Finalement, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et égale à $1/\sqrt{2}$ en 1, cette dernière étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout entier $n \geq 3$ et tout $x \geq 1$, on a
$$f_n(x) = \frac{1}{x^{n/2}\sqrt{x^{2n}+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}$$
tandis que pour $x \in \,]0;1[$, $\displaystyle f_n(x) = \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1+x^{-2n}}} \leq x^{3/2}$

  Ainsi, pour tout $n \geq 3$, la fonction f_n est majorée par la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{3/2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
et cette dernière est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car prolongeable par continuité en 0 et équivalente à $x \longmapsto 1/x^{3/2}$ en $+\infty$.

Le théorème de convergence dominée peut donc s'appliquer et prouve que

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\geq 3} \text{ est de limite nulle.}}$$

Pour obtenir un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$, effectuons le changement de variable $u = x^n$ (avec $x \longmapsto x^n$ bijective $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante). Ainsi, pour $n \geq 3$,

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/n-1}}{\sqrt{u+1/u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/n}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}}$$

Appliquons une nouvelle fois le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $u > 0$, $$\frac{u^{1/n}}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}}$$
- Pour tout $u > 0$ et tout entier $n \geq 3$, on a
$$u^{1/n} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ u^{1/3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad 0 \leq \frac{u^{1/n}}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}} \leq \frac{\max(1,u^{1/3})}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}}$$
La quantité de droite est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car équivalente à $1/\sqrt{u}$ en 0^+ et à $1/u^{7/6}$ en $+\infty$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que l'intégrale en facteur du $1/n$ converge vers l'intégrale de la limite simple de l'intégrande. Par suite,

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}}}$$

Remarque : Le logiciel de calcul formel Maple ne donne comme expression simple de l'intégrale intervenant dans l'équivalent de I_n qu'une formule faisant intervenir la fonction β d'Euler. Cette dernière est réliée à la fonction Γ par la relation

$$\forall \alpha,\beta > 0, \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Dans le cas de l'intégrale ci-dessus, Maple affirme donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

et il n'y a sans doute pas d'expression plus simple.

10 ———— (∗) ———— **PC Mines 2009**

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}x}\,\mathrm{d}x$ converge, puis que $I = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

L'application $f : x \longmapsto x/\mathrm{ch}x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t \longmapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. Elle est donc intégrable et I est bien définie. Pour calculer, notons que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2x}{e^x+e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1+e^{-2x}} = 2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-2x})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2xe^{-(2n+1)x}$$

Notons que si les égalités intermédiaires nécessitent d'avoir $x > 0$, cette dernière égalité reste valable pour $x = 0$. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque à $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto (-1)^n 2xe^{-(2n+1)x}$.

- Pour tout entier n, la fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car négligeable devant $x \longmapsto 1/x^2$ en $+\infty$.
- Par construction, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$, qui est continue.
- Pour tout entier n,
$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x = \left[-2x\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^2}$$
qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème s'applique et prouve que $$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

soit bien $$\boxed{\text{L'intégrale } I \text{ converge et } I = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}}$$

Remarque : La valeur $I/2$ porte le nom de constante de Catalan. Il n'y a pas d'expression simple de ce réel et on ignore encore s'il s'agit d'un rationnel ou d'un irrationnel.

11 ——— $(*)$ ——— **CCP PC 2011**

(a) Convergence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

(b) Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $t \longmapsto t\,e^{-nt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t \longmapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle, ce qui assure que I_n est bien définie.
Pour le calcul, on peut effectuer le changement de variable affine $u = nt$ et reconnaître alors la fonction Γ puisqu'alors

$$I_n = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(2)}{n^2}$$

Sachant que $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \int_0^{+\infty} t\,e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

(b) Notons
$$f : t \longmapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}$$

L'application f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1+O(\sqrt{t})}{1-\big(1+\sqrt{t}+O(t)\big)} = \frac{1+O(\sqrt{t})}{\sqrt{t}+O(t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Cet équivalent assure l'intégrabilité de f en 0. Par ailleurs, en $+\infty$

$$f(t) \sim e^{-\sqrt{t}} = O\left(\frac{1}{(\sqrt{t})^4}\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui justifie que I est bien définie.
Pour calculer cette intégrale, utilisons le théorème d'intégration terme à terme. Pour tout réel $t > 0$, on a $e^{-\sqrt{t}} \in\,]0;1[$ donc

$$f(t) = e^{-\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{1-e^{-\sqrt{t}}} = e^{-\sqrt{t}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-\sqrt{t}}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\sqrt{t}}$$

après utilisation de la somme des termes d'une suite géométrique puis changement d'indice. Notons par conséquent, $g_n : t \longmapsto e^{-n\sqrt{t}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue et négligeable devant $t \longmapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$.
- Par construction, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction f, qui est continue.
- Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, il vient
$$\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-n\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} u\,e^{-nu}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{n^2}$$
d'après la première question. Ce dernier terme est bien le terme général d'une série convergente.

Le théorème peut donc s'appliquer et permet d'établir que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2}$$

et finalement, sachant que $\zeta(2) = \pi^2/6$,

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}$$

12 — (**)

Soit f définie par
$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \,\mathrm{d}t$$

Donner le domaine de définition de f et étudier sa monotonie, puis déterminer ses limites en $(-1)^+$ et $+\infty$.

Notons
$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\,]0;\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & (\sin t)^x \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto (\sin t)^x$ est continue sur $]0;\pi/2]$ et $h(x,t)$ est équivalent en 0 à t^x. Le critère de Riemann assure aussitôt qu'elle est intégrable sur $]0;\pi/2]$ si et seulement si $x > -1$. Par suite, $f(x)$ est bien défini seulement pour $x > -1$. Remarquons ensuie que pour tout $t \in\,]0;\pi/2]$, l'application $x \longmapsto h(x,t)$ est décroissante. Par croissance de l'intégrale, on peut conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et décroissante sur }]-1;+\infty[.}$$

Pour déterminer la limite en $+\infty$, on passe par la caractérisation séquentielle et le TCD. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels dans $]-1;+\infty[$. On note $f_n : t \longmapsto (\sin t)^{x_n}$ pour tout entier n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0;\pi/2]$ d'après ce qui précède (sachant que $x_n > 1$).
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0;\pi/2[$ vers la fonction nulle (on extrait du domaine de définition la borne $\pi/2$ pour s'épargner un cas particulier).
- Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $x_n \geq 0$ à partir d'un certain rang et alors, $|f_n| \leq 1$, qui est intégrable sur $]0;\pi/2[$ car l'intervalle est borné.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t = f(x_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été choisie arbitraire, il vient par caractérisation séquentielle que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de limite nulle en } +\infty.}$$

Pour la limite en 0, on peut remarquer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ est divergente, ce qui incite à montrer que la limite de f en 0 est $+\infty$. Il suffit pour cela de minorer f. Or, pour $x < 0$, on a

$$\forall t \in\,]0;\pi/2[, \qquad (\sin t)^x \geq t^x \qquad \text{puis} \qquad f(x) \geq \int_0^{\pi/2} t^x \,\mathrm{d}t = \frac{(\pi/2)^{x+1}}{x+1}$$

Lorsque x tend vers $(-1)^+$, le terme de droite tend vers $+\infty$ donc par minoration,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de limite } +\infty \text{ en } 0.}$$

13 — (**)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit
$$u(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

(a). Montrer que u et v sont définies sur $\mathbb{R}$.

(b). En introduisant $z = u + iv$, déterminer une équation différentielle vérifiée par z. En déduire une expression de z, puis de u et v. On pourra utiliser l'égalité
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$$

(a) Il suffit de remarquer que pour tout réel x,
$$\left|\cos(xt)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad \left|\sin(xt)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Or, la fonction $h : t \longmapsto e^{-t}/\sqrt{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: la quantité $h(t)$ est équivalente à $1/\sqrt{t}$ en 0, et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ ce qui permet d'appliquer le critère de Riemann. Par domination, les deux intégrales définissant $u(x)$ et $v(x)$ sont donc convergentes et

$$\boxed{\text{Les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont définies sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $$z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Notons donc $f : (x,t) \longmapsto e^{(ix-1)t}/\sqrt{t}$, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Elle admet une dérivée partielle par rapport à x donnée pour tout $x > 0$ par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}\,e^{(ix-1)t}$$

Appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral.

- Pour tout $t > 0$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle complexe est continue).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a obtenu l'intégrabilité de $t \longmapsto f(x,t)$, car sa partie réelle et ss partie imaginaire le sont. Il est est de même de $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, qui est cette fois prolongeable par continuité en 0 dont intégrable en 0 (en $+\infty$, on a à nouveau un $o(1/t^2)$.
- Enfin, pour tout réel x, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sqrt{t}\,e^{-t}$ qui est une quantité intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème s'appliqe donc et prouve que z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x,

$$z'(x) = i\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,e^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t$$

Pour retrouver une équation différentielle, effectuons une intégration par parties. Quitte à passer par un segment, on peut écrire que

$$\begin{aligned}(x+i)z'(x) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\left[(ix-1)e^{(ix-1)t}\right]\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\sqrt{t}\,e^{(ix-1)t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ (x+i)z'(x) &= -\frac{1}{2}z(x)\end{aligned}$$

Calculons par conséquent la primitive de $x \longmapsto -1/(x+i)$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+i} = \int\left(\frac{x}{x^2+1} - i\frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - i\arctan(x)$$

et donc pour tout réel x,

$$z(x) = z(0)\exp\left(-\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{i}{2}\arctan(x)\right)$$

Pour calculer $z(0)$, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (sachant que $t \longmapsto \sqrt{t}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même) d'où $t = u^2$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ donc

$$z(0) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Finalement, en séparant parties réelles et parties imaginaires, on trouve

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\qquad u(x) = \sqrt{\pi}\,\frac{\cos(\arctan(x)/2)}{(1+x^2)^{1/4}}\quad\text{et}\quad v(x) = \sqrt{\pi}\,\frac{\sin(\arctan(x)/2)}{(1+x^2)^{1/4}}}$$

14 (∗)

Etudier la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Notons $$h:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* &\longrightarrow& \mathbb{R}\\ (x,t) &\longmapsto& (1-\cos(xt))e^{-t}/t^2\end{array}$$

Pour tout réel x, l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur $x^2/2$) et dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \longmapsto 1/t^2$. Ainsi, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Justifions que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il est clair que h admet une dérivée partielle par rapport à x jusqu'à l'ordre 2 avec pour tout (x,t),

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$$

Appliquons maintenant le théorème de dérivation sous le signe intégral.

- Pour tout réel $t > 0$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x et tout $p \in [\![0;2]\!]$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \longmapsto 1/t^2$ en $+\infty$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-t}$$
avec $t \longmapsto e^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème s'applique et prouve donc que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec pour tout réel } x, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Cette dernière intégrale se calcule immédiatement en passant en complexes. En effet, pour tout réel x,

$$f''(x) = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t\right) = \Re\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} = \Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Par intégration successives, on en déduit dans un premier temps que

$$f'(x) = f'(0) + \arctan x \qquad \text{puis} \qquad f(x) = xf'(0) + f(0) + x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Les expressions de f' et f donnent immédiatement les égalités $f(0) = f'(0) = 0$. On en déduit finalement que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

15 ——— $(**)$ ———

Soit f définie par
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a). Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f. Que dire de la limite de f en $+\infty$?

(b). Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

(c). Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$, l'intégrande étant prolongée par continuité en 1.

(a) Notons
$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\pi}{2(1+t^2)} \end{array}$$

Il est clair que pour tout réel x, on a $0 \leq h(x,t) \leq \varphi(t)$. Cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit aussitôt que $t \longmapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout x. Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$.
La continuité s'obtient par une application immédiate du théorème adéquat :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après ce qui précède.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $|h(x,t)| \leq \varphi(t)$, cette dernière quantité étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique et prouve que f est continue. Enfin, pour déterminer la limite de f en $+\infty$, il suffit de passer par la caractérisation séquentielle des limites et la convergence dominée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs de limite $+\infty$, et $h_n : t \longmapsto h(x_n,t)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur $\mathbb{R}_+$, qui est continue.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est majoré par φ, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que

$$f(x_n) = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

et donc, par caractérisation séquentielle des limites, f est de limite $\pi^2/4$ en $+\infty$. Pour conclure,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}\text{, et de limite } \pi^2/4 \text{ en } +\infty.}$$

(b) Appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral à la restriction de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (la fonction étant clairement impaire, la dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$ s'en déduira aussitôt). La fonction h admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{1+x^2t^2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après ce qui précède. De plus, $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est également continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable, car équivalente à $t \longmapsto 1/(x^2t^3)$ en $+\infty$.
- Pour tout segment $[a;b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $(x,t) \in [a;b]\times\mathbb{R}_+$, on a
$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$$
cette dernière quantité étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de dérivation avec domination locale peut donc s'appliquer et prouve que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ avec pour tout } x \text{ non nul}\\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\end{array}}$$

Si l'on remplace x par 0 dans l'expression de $f'(x)$, on obtient une intégrale divergente, ce qui laisse présager d'une limite infinie de f' en 0. Justifions-le. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^{\delta} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \geq A+1$$

Par ailleurs, pour tout réel x,
$$f'(x) \geq \int_0^{\delta} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

On prouve facilement grâce aux techniques habituelles (caractérisation séquentielle des limites et convergence dominée) que

$$\int_0^{\delta} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{\delta} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \geq A+1$$

donc il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]0;\epsilon[$,

$$\int_0^{\delta} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \geq A \qquad \text{d'où} \qquad f'(x) \geq A$$

Le réel A ayant été choisi arbitraire, on a démontré que f' est de limite $+\infty$ en 0. On sait alors via un résultat de cours que nécessairement

$$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ est de limite } +\infty \text{ en } 0.}$$

(c) Remarquons déjà que $x \longmapsto \ln x/(x^2-1)$ prolongée par continuité en 1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car dominée par $x \longmapsto 1/x^{3/2}$ en $+\infty$ et par $x \longmapsto 1/\sqrt{x}$ en 0 par croissances comparées.

Pour $x > 0$, cherchons une expression de $f'(x)$ sans symbole intégral. Pour $x \neq 1$, on peut écrire pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]$$

d'où $$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{1+x^2t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{x^2-1}$$

Notons que l'égalité reste valable quitte à prolonger $x \longmapsto \ln(x)/(x^2-1)$ par continuité en 1 (par 1/2) car f' est continue. Cette expression prouve que pour tout réel ϵ,

$$\int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_\epsilon^{1/\epsilon} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1/\epsilon) - f(\epsilon)$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient compte tenu de la limite de f en $+\infty$ et de sa valeur nulle en 0,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}}$$

16 —— (∗∗) —— **Centrale PC 2012**

(a) L'application $\theta \longmapsto \ln(1-\sin^2\theta)$ est-elle intégrable sur $[0;\pi/2[$?

(b) On note $$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Montrer que F est continue sur $[-1;+\infty[$.

(c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

(d) Exprimer $F'(x)$ sans intégrale. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour tout $x \geq -1$.

(a) L'application $\theta \longmapsto \ln(1-\sin^2\theta)$ est continue sur $[0;\pi/2[$ et lorsque θ tend vers 0, on a avec $u = \pi/2-\theta$,

$$\ln(1-\sin^2\theta) = \ln(1-\cos^2 u) = 2\ln\sin u \sim 2\ln u = o\left(1/\sqrt{u}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2-\theta}}\right)$$

Cette domination assure donc que

$$\boxed{\text{L'application } \theta \longmapsto \ln(1-\sin^2\theta) \text{ est intégrable sur } [0;\pi/2[.}$$

(b) Notons $J = [-1;+\infty[$, $I = [0;\pi/2[$ puis $$h: \begin{array}{rcl} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \ln(1+x\sin^2\theta) \end{array}$$

Appliquons le théorème de continuité sous le signe intégral.

- Pour tout réel $\theta \in I$, l'application $x \longmapsto h(x,t)$ est continue car l'argument du ln ne s'annule pas.
- Pour tout réel $x \in J$, l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur I : c'est le résultat de la question (a) pour $x=-1$, et pour $x > -1$, elle admet un prolongement par continuité en $\pi/2$.
- Pour tout segment $[a;b] \subset J$, et tout $(x,\theta) \in [a;b]\times I$,

$$a \leq x \leq b \qquad \text{puis} \qquad 1+a\sin^2\theta \leq 1+x\sin^2\theta \leq 1+b\sin^2\theta$$

et finalement $$\begin{aligned} |h(x,\theta)| &\leq \max\left\{\left|\ln(1+a\sin^2\theta)\right|, \left|\ln(1+b\sin^2\theta)\right|\right\} \\ &\leq \left|\ln(1+a\sin^2\theta)\right| + \left|\ln(1+b\sin^2\theta)\right| \end{aligned}$$

le terme de droite étant intégrable sur I comme somme de deux fonctions intégrables (car $a, g \geq -1$).

Le théorème de continuité avec domination locale s'applique et prouve que

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } [-1;+\infty[.}$$

(c) On conserve les notations précédentes. L'application h admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par

$$\forall (x,t) \in J\times I, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin^2\theta}{1+x\sin^2\theta}$$

Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme à la restriction de F à $]-1;+\infty[$.

- Pour tout réel $\theta \in I$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue car le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour tout réel $x \in J$, on sait déjà que l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur I. Il en est de même de $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ qui est prolongeable par continuité en $\pi/2$ lorsque $x > -1$.
- Pour tout segment $[a;b] \subset]-1;+\infty[$, et tout $(x,\theta) \in [a;b] \times I$,
$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{\sin^2\theta}{1+a\sin^2\theta}$$
cette dernière quantité étant intégrable sur $[0;\pi/2[$ car prolongeable par continuité en $\pi/2$.

Le théorème s'applique et prouve que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1;+\infty[\text{ avec pour tout } x > -1 \\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{1+x\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\end{array}}$$

(c) Pour calculer $F'(x)$, on effectue le changement de variable $u = \tan\theta$, avec $\theta \longmapsto \tan\theta$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[0;\pi/2[$ dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\theta = \arctan u \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{u^2}{1+u^2}$$

et donc
$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2/(1+u^2)}{1+xu^2/(1+u^2)}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)}\,\mathrm{d}u$$

Remarquons alors que pour tout x non nul et tout $u \geq 0$,

$$\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(x+1)u^2}\right]$$

d'où
$$F'(x) = \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(x+1)u^2}\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}\right]$$

On peut obtenir une expression valable pour tout $x > -1$ en utilisant la continuité de F' et en écrivant que

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x+1+\sqrt{x+1}}$$

et ainsi,
$$\boxed{\forall x > -1, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{2(x+1+\sqrt{x+1})}}$$

Pour calculer F, on intègre cette expression entre 0 et x en remarquant que $F(0) = 0$. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t+1}$, il vient

$$t = u^2 - 1 \qquad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad F(x) = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1+\sqrt{t+1}} = \pi\int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{\mathrm{d}u}{u+1}$$

et on peut finalement conclure
$$\boxed{\forall x > -1, \quad F(x) = \pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{x+1}}{2}\right)}$$

17 — (∗∗)

Soient f et g définies pour tout réel x respectivement par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a). Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout réel x.

(b). Prouver que $g \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme carré d'une primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Pour la fonction g, il n'y a qu'à appliquer le théorème de dérivaton sous le signe intégral. Notons

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$$

Alors, h admet pour dérivée partielle par rapport à x l'application $(x,t)\longmapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$. Ensuite,

- Pour tout $t\in[0;1]$, l'application $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, les applications $t\longmapsto h(x,t)$ et $t\longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont continues et donc intégrables sur $[0;1]$.
- Pour tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$, et tout $(x,t)\in[a;b]\times[0;1]$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leq \max(|a|,|b|)$, cette constante étant intégrable sur le segment $[0;1]$.

Le théorème avec domination locale s'applique et prouve que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad g'(x)=-2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Remarquons pour finir que pour tout réel x, en posant $u=xt$,

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

On reconnaît immédiatement l'opposé de la dérivée de f. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } f'+g'=0.}$$

(b) Déterminons la limite de g en $+\infty$ à l'aide de la caractérisation séquentielle des limites. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de limite $+\infty$. On note $h_n: t\longmapsto h(x_n,t)$.

- Pour tout entier n, l'application h_n est continue donc intégrable sur $[0;1]$.
- La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ma fonction nulle sur $[0;1]$.
- Pour tout entier n, on a $|h_n|\leq 1$, cette dernière quantité étant intégrable sur $[0;1]$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que

$$\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{soit} \qquad g(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été choisie arbitrairement, il vient que

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de limite nulle en } +\infty.}$$

On sait que $f+g$ est constante, car sa dérivée est nulle. De plus, il est clair que $f(0)=0$ et $g(0)=\pi/4$. Il s'ensuit que pour tout réel x,

$$f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi}{4}-g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{\pi}{4}$$

On en déduit aussitôt que $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

18 ——— $(**)$ ——— **Mines PC 2013**

Soit f définie par $$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

Après l'étude classique de f (domaine de définition, continuité, dérivabilité), déterminer des équivalents simples de cette fonction en 0^+ et en $+\infty$.

Pour $x<0$, l'application $t\longmapsto e^{-t}/(t+x)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f ne l'est pas non plus. Si $x=0$, elle est équivalente à $t\longmapsto 1/t$ en 0, donc n'est pas intégrable. Enfin, si $x>0$, elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $t\longmapsto 1/t^2$ donc intégrable cette fois. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Montrons maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note

$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}/(t+x) \end{array}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'application h admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k par rapport à x avec pour tout $p \in [\![1;k]\!]$ et tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = (-1)^k k! \frac{e^{-t}}{(t+x)^{k+1}}$$

Vérifions les hypothèses du théorème.

- Pour tout réel $t \geq 0$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}(x,t)$ est continue.
- Pour tout réel $x > 0$ et tout $p \in [\![1;k]\!]$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial^p}{\partial x^p}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Enfin, pour tout segment $[a;b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et tout $(x,t) \in [a;b] \times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq k! \frac{e^{-t}}{(t+a)^k}$$

  cette dernière quantité étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème avec domination locale s'applique et prouve donc que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Pour obtenir un équivalent en $+\infty$, on commence par effectuer le changement de variable $u = t + x$. Ainsi,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u+x}}{u}\,\mathrm{d}u = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \tag{$\star$}$$

Au passage, notons que cette nouvelle expression $(\star)$ justifie immédiatement le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f sans passer par le théorème de dérivabilité ! Effectuons maintenant une intégration par parties. Quitte à passer par un segment, on obtient

$$f(x) = e^x \left(\left[-\frac{e^{-u}}{u} \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} \right) = \frac{1}{x} - e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Une majoration grossière prouve maintenant que pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-x}}{x^2} \qquad \text{et donc} \qquad f(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x}$$

Pour obtenir l'équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0, il n'y a qu'à chercher un équivalent de l'intégrale dans $(\star)$ (car l'exponentielle tend vers 1). Sachant que $u \longmapsto e^{-u}/u$ est équivalente à $u \longmapsto 1/u$ en 0, on décompose cette intégrale de la manière suivante :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_x^1 \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

Le premier terme est une constante indépendante de x. Le deuxième est égal à $-\ln x$. Enfin, la fonction $u \longmapsto (e^{-u}-1)/u$ est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0;1]$. Cela prouve la convergence de la troisième intégrale ci-dessus lorsque x tend vers 0. Finalement, on en déduit que $f(x) \sim -\ln x$ en 0.

$$\boxed{\text{La quantité } f(x) \text{ est équivalente à } 1/x \text{ en } +\infty, \text{ et } -\ln x \text{ en } 0.}$$

19 —— $(**)$ ——

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(a). Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale impropre $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge. On pourra introduire la primitive F de f qui s'annule en 0 et effectuer une intégration par parties.

(b). Justifier la limite $T(f)(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} I$.

(a) Soit F la primitive de F qui s'annule en 0 : $\qquad F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour tout $x > 0$, l'application $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, par intégration par parties

$$\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = [F(t)e^{-xt}]_0^A + x\int_0^A F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = F(A)e^{-xA} + x\int_0^A F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

La convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ assure que F a une limite en $+\infty$ et est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Cela assure d'une part la convergence de $F(A)e^{-xA}$ vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$, mais également la convergence (absolue) de $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

(b) En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient pour tout $x > 0$,

$$T(f)(x) = x\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

puis à l'aide du changement de variable affine $u = xt$,

$$T(f)(x) = \int_0^{+\infty} F(u/x)e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Déterminons maintenant la limite de $T(f)$ à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle. Notons $h_n : u \longmapsto F(u/x_n)e^{-u}$. Rappellons que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout entier n, la fonction h_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout entier n, $F(0) = 0$ et pour tout $u > 0$, $F(u/x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t e^{-u}$. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue par morceaux.
- Pour tout entier n et tout $u \geq 0$, on a $|h_n(u)| \leq ||F||_\infty\, e^{-u}$, cette dernière quantité étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que

$$\int_0^{+\infty} h_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = I \qquad \text{soit} \qquad T(f)(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été choisie arbitraire, par caractérisation séquentielle de la limite

$$\boxed{\text{La fonction } T(f) \text{ est de limite } I \text{ en } 0.}$$