

Nous adopterons les notations que l'énoncé utilise implicitement :

- Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ désigne une matrice carrée à d lignes et d colonnes, alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$, le coefficient d'indice (i, j) de A est noté $A_{i,j}$.
- Si $x \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ désigne une matrice ligne ou si $y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ désigne une matrice colonne, alors pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, x_i désigne le coefficient d'indice $(1, i)$ de x et y_i le coefficient d'indice $(i, 1)$ de y .

Par ailleurs, l'énoncé emploie régulièrement les notations u , v et ν (la lettre grecque « nu ») et il faut veiller à ne pas les confondre.

I. PREMIÈRE PARTIE

1 Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$, on a par hypothèse $c\nu_j \leq P_{i,j}$. Sommons ces inégalités en prenant $i = 1$ afin d'obtenir

$$c \sum_{j=1}^d \nu_j \leq \sum_{j=1}^d P_{1,j}$$

Or, par hypothèse sur P et puisque $\nu = (\nu_1 \cdots \nu_d)$ est un élément de $\mathcal{P}$

$$\sum_{j=1}^d \nu_j = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^d P_{1,j} = 1$$

d'où

$$\boxed{c \leq 1}$$

2 Soit $u \in \mathcal{P}$. La matrice u est de type $(1, d)$ et la matrice P est de type (d, d) donc on peut considérer la matrice $v = uP$ qui est de type $(1, d)$. Pour tout $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$, on a

$$v_j = \sum_{k=1}^d u_k P_{k,j} \geq 0$$

car les coefficients de u et P sont positifs. Ensuite,

$$\sum_{j=1}^d v_j = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d u_k P_{k,j}$$

En permutant les deux sommes finies, il vient

$$\sum_{j=1}^d v_j = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d u_k P_{k,j} = \sum_{k=1}^d u_k \sum_{j=1}^d P_{k,j} = \sum_{k=1}^d u_k = 1$$

On a ainsi démontré

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{P} \quad uP \in \mathcal{P}}$$

3 Étrangement, ici l'énoncé propose de noter $n_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice N alors qu'ailleurs, ce coefficient aurait été noté $N_{i,j}$.

Comme l'énoncé le propose, introduisons les matrices $N = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad n_{i,j} = \nu_j$$

et $R = P - cN$. Soient u et v deux éléments de $\mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} uP - vP &= (u - v)P \\ &= (u - v)(R + cN) \\ uP - vP &= (u - v)R + c(uN - vN) \end{aligned}$$

Or, pour tout $w \in \mathcal{P}$,

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad (wN)_j = \sum_{k=1}^d w_k \nu_j = \nu_j$$

donc $wN = \nu$. Par conséquent, puisque u et v désignent des éléments de $\mathcal{P}$,

$$c(uN - vN) = c(\nu - \nu) = 0_{1,d}$$

Ensuite, pour tout $x \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$,

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad (xR)_j = \sum_{k=1}^d x_k (P_{k,j} - c \nu_j)$$

avec

$$\forall (k, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad P_{k,j} - c \nu_j \geq 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \|xR\|_1 &= \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d x_k (P_{k,j} - c \nu_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |x_k| (P_{k,j} - c \nu_j) \\ &= \sum_{k=1}^d |x_k| \sum_{j=1}^d (P_{k,j} - c \nu_j) \\ &= \sum_{k=1}^d |x_k| (1 - c) \end{aligned}$$

$$\|xR\|_1 \leq (1 - c) \|x\|_1$$

le passage de première à la deuxième ligne s'obtenant en utilisant l'inégalité triangulaire et celui de la deuxième à la troisième par permutation de deux sommes finies. Par suite,

$$\|(u - v)R\|_1 \leq (1 - c) \|u - v\|_1$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \|uP - vP\|_1 &= \|(u - v)R\|_1 \\ &\leq (1 - c) \|u - v\|_1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2 \quad \|uP - vP\|_1 \leq (1 - c) \|u - v\|_1}$$

En utilisant directement l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \|uP - vP\|_1 &= \|(u - v)P\|_1 \\ &= \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d (u_k - v_k) P_{k,j} \right| \\ \|uP - vP\|_1 &\leq \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |u_k - v_k| P_{k,j} \end{aligned}$$

car les coefficients de P sont positifs. Les sommes étant finies, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |u_k - v_k| P_{k,j} &= \sum_{k=1}^d |u_k - v_k| \sum_{j=1}^d P_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^d |u_k - v_k| \\ \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |u_k - v_k| P_{k,j} &= \|u - v\|_1 \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$\|uP - vP\|_1 \leq \|u - v\|_1$$

mais elle n'est pas aussi intéressante que celle qui est attendue...

La matrice N est la matrice carré à d lignes et d colonnes dont chaque ligne est la matrice ligne ν . Le point clé de cette démonstration est le suivant : pour tout $u \in \mathcal{P}$, $uN = \nu$ puis

$$\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2 \quad (u - v)N = 0_{1,d}$$

4

L'énoncé indique que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathcal{P}$. Ce fait est une conséquence de la question 2 qui établit que si $u \in \mathcal{P}$, alors $uP \in \mathcal{P}$. Ici, $x_0 \in \mathcal{P}$ et par une récurrence élémentaire, on montre que pour tout entier naturel n , $x_n \in \mathcal{P}$. Par ailleurs, une telle suite existe car $\mathcal{P}$ est non vide. En effet, le vecteur ligne

$(1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ en est un élément.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\|_1 &= \|x_{n+1}P - x_nP\|_1 \\ &\leq (1 - c)\|x_{n+1} - x_n\|_1 \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{Q}(n) : \quad \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|_1$$

est vraie quel que soit l'entier naturel n .

- $\mathcal{Q}(0)$ est vraie puisque $\|x_1 - x_0\|_1 = (1 - c)^0 \|x_1 - x_0\|_1$.
- $\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie. On a

$$\|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|_1$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \|x_{n+2} - x_{n+1}\|_1 &\leq (1 - c)\|x_{n+1} - x_n\|_1 \\ &\leq (1 - c)^{n+1} \|x_1 - x_0\|_1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|_1$$

Comme $c \in]0; 1]$, $1 - c \in [0; 1[$ donc la série géométrique

$$\sum (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|_1$$

converge. Par comparaison de séries à termes positifs, il s'ensuit

La série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|_1$ converge.

La somme de la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|_1$ vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|_1$$

et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - c)^n \|x_1 - x_0\|_1 = \frac{\|x_1 - x_0\|_1}{c}$$

d'où
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_1 \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_1}{c}$$

5 Pour tout entier naturel n , notons

$$x_n = (x_1^{(n)} \cdots x_d^{(n)})$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$, la suite $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Fixons donc $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$. Nous allons utiliser le lien suite/série en montrant que la série télescopique

$$\sum (x_j^{(n+1)} - x_j^{(n)})$$

converge. Pour tout entier naturel n , on a

$$|x_j^{(n+1)} - x_j^{(n)}| \leq \sum_{k=1}^d |x_k^{(n+1)} - x_k^{(n)}| = \|x_{n+1} - x_n\|_1$$

Or, on a montré dans la question précédente que la série

$$\sum \|x_{n+1} - x_n\|_1$$

convergeait. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série

$$\sum (x_j^{(n+1)} - x_j^{(n)})$$

converge absolument, donc converge. Par conséquent, la suite $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Ceci étant valable pour $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ quelconque, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Il reste à vérifier que sa limite notée $\mu = (\mu_1 \cdots \mu_d)$ est élément de $\mathcal{P}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathcal{P}$ donc pour tout entier naturel n , on a

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad x_j^{(n)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^d x_j^{(n)} = 1$$

donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, il vient

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \mu_j \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^d \mu_j = 1$$

si bien que μ est élément de $\mathcal{P}$. Finalement,

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathcal{P}$.

L'appartenance de la limite μ à $\mathcal{P}$ peut être déduite du fait que $\mathcal{P}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$. En effet, définissons les applications $f_1, \dots, f_d$ par

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad f_j: \begin{cases} \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & \longmapsto u_j \end{cases}$$

et $g: \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall u \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) \quad g(u) = \sum_{j=1}^d u_j$$

Ces applications sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, elles sont donc continues. Par suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ u \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \sum_{j=1}^d u_j = 1 \right\} \\ &= \left(\bigcap_{j=1}^d \{u \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) \mid f_j(u) \geq 0\} \right) \cap \{u \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) \mid g(u) = 1\} \end{aligned}$$

est une partie fermée de $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ comme intersection d'images réciproques de parties fermées par des applications continues.

Cette question aurait été plus simple en utilisant les outils au programme de la filière MP/MPI. En effet, on a vu que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|_1$ convergeait. En d'autres termes, la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également.

6 Unicité: Supposons l'existence de deux éléments μ et μ' de $\mathcal{P}$ tels que $\mu P = \mu$ et $\mu' P = \mu'$. Avec le résultat de la question 3, on obtient

$$\|\mu - \mu'\|_1 = \|\mu P - \mu' P\|_1 \leq (1 - c) \|\mu - \mu'\|_1$$

puis

$$c \|\mu - \mu'\|_1 \leq 0$$

De plus, $c > 0$ et $\|\mu - \mu'\|_1 \geq 0$ si bien que $\|\mu - \mu'\|_1 = 0$, ou encore $\mu = \mu'$.

Existence: Soit x_0 un élément quelconque de $\mathcal{P}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n P$$

On a prouvé dans la question précédente que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait vers un élément de $\mathcal{P}$ que l'on note μ . La suite extraite $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi de limite μ . Par ailleurs, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto uP \end{cases}$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ qui est continu car l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Par conséquent,

$$x_n P \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu P$$

Ainsi, par unicité de la limite, $\mu = \mu P$.

Il existe un unique élément μ de $\mathcal{P}$ tel que $\mu = \mu P$.

7 Soit x un élément de $\mathcal{P}$. Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = x P^n$$

Cette suite vérifie $x_0 = x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x P^{n+1} = (x P^n) P = x_n P$$

D'après ce qui précède, cette suite converge de limite μ . Alors, pour tout entier naturel n , en appliquant n fois le résultat de la question 3, on obtient

$$\begin{aligned} \|x_n - \mu\|_1 &= \|x_{n-1} P - \mu P\|_1 \\ &\leq (1 - c) \|x_{n-1} - \mu\|_1 \\ &\leq (1 - c)^2 \|x_{n-2} - \mu\|_1 \\ &\vdots \\ \|x_n - \mu\|_1 &\leq (1 - c)^n \|x_0 - \mu\|_1 \end{aligned}$$

Raisonnons par récurrence pour ceux qui ne sont pas convaincus par cette démonstration « à la manivelle ». Montrons que

$$\mathcal{Q}(n) : \quad \|x_n - \mu\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_0 - \mu\|_1$$

est vraie pour tout entier naturel n .

- On a $\|x_0 - \mu\|_1 = (1 - c)^0 \|x_0 - \mu\|_1$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
- $\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose $\mathcal{Q}(n)$ vraie. On a

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - \mu\|_1 &= \|x_n P - \mu P\|_1 \\ &\leq (1 - c) \|x_n - \mu\|_1 \\ \|x_{n+1} - \mu\|_1 &\leq (1 - c)^{n+1} \|x_0 - \mu\|_1\end{aligned}$$

d'après $\mathcal{Q}(n)$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n - \mu\|_1 \leq (1 - c)^n \|x_0 - \mu\|_1$

Enfin, pour tout $u \in \mathcal{P}$, par définition d'un élément de $\mathcal{P}$, on a

$$\|u\|_1 = |u_1| + \dots + |u_d| = u_1 + \dots + u_d = 1$$

donc en appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|x_0 - \mu\|_1 \leq \|x_0\|_1 + \|\mu\|_1 = 2$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{P} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x P^n - \mu\|_1 \leq 2(1 - c)^n}$$

II. DEUXIÈME PARTIE

8 On a $Mh = \lambda h$ donc pour tout $i \in \llbracket 1 ; d \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^d M_{i,j} h_j = \lambda h_i$$

puis

$$\sum_{j=1}^d P_{i,j} = \sum_{j=1}^d \frac{M_{i,j} h_j}{\lambda h_i} = \frac{1}{\lambda h_i} \sum_{j=1}^d M_{i,j} h_j$$

d'où

$$\boxed{\sum_{j=1}^d P_{i,j} = 1}$$

9 Pour se donner des idées, regardons ce qui se passe avec la matrice P^2 . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; d \rrbracket^2$, on a

$$\begin{aligned}(P^2)_{i,j} &= \sum_{k=1}^d P_{i,k} P_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{M_{i,k} h_k}{\lambda h_i} \times \frac{M_{k,j} h_j}{\lambda h_k} \\ &= \frac{h_j}{\lambda^2 h_i} \sum_{k=1}^d M_{i,k} M_{k,j} \\ (P^2)_{i,j} &= \frac{(M^2)_{i,j} h_j}{\lambda^2 h_i}\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que

$$\mathcal{Q}(n) : \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad (\mathbf{P}^n)_{i,j} = \frac{(\mathbf{M}^n)_{i,j} h_j}{\lambda^n h_i}$$

est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- $\mathcal{Q}(1)$ est vraie par définition de la matrice $\mathbf{P}$.
- $\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie. Pour tous éléments i et j de $\llbracket 1; d \rrbracket$, on a $\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}$ donc

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^{n+1})_{i,j} &= \sum_{k=1}^d (\mathbf{P}^n)_{i,k} \mathbf{P}_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{(\mathbf{M}^n)_{i,k} h_k}{\lambda^n h_i} \times \frac{\mathbf{M}_{k,j} h_j}{\lambda h_k} \\ &= \frac{h_j}{\lambda^{n+1} h_i} \sum_{k=1}^d (\mathbf{M}^n)_{i,k} \mathbf{M}_{k,j} \\ (\mathbf{P}^{n+1})_{i,j} &= \frac{(\mathbf{M}^{n+1})_{i,j} h_j}{\lambda^{n+1} h_i} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad (\mathbf{P}^n)_{i,j} = \frac{(\mathbf{M}^n)_{i,j} h_j}{\lambda^n h_i}}$$

Le résultat reste valable pour $n = 0$ puisque $\mathbf{P}^0 = \mathbf{M}^0 = \mathbf{I}_d$. On aurait ainsi pu initialiser la récurrence au rang 0.

10a Les coefficients de la matrice $\mathbf{M}$ sont positifs, ceux du vecteur propre h sont tous strictement positifs et la valeur propre λ est strictement positive. Dès lors,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad \mathbf{P}_{i,j} = \frac{\mathbf{M}_{i,j} h_j}{\lambda h_i} \geq 0$$

On a montré dans la question 8 que

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \sum_{j=1}^d \mathbf{P}_{i,j} = 1$$

En outre, on a l'existence d'un élément ν de $\mathcal{P}$ et d'un élément c de $\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad \mathbf{M}_{i,j} \geq c \nu_j$$

En notant respectivement α et β le minimum et le maximum de $\{h_1, \dots, h_d\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}_+^*$ car $h \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$, il vient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad \mathbf{P}_{i,j} \geq \frac{c \alpha}{\lambda \beta} \nu_j$$

On a

$$\frac{c \alpha}{\lambda \beta} > 0$$

car c, α, β et λ sont strictement positifs. Alors, en utilisant le résultat de la question 6 avec le réel strictement positif c de la première partie remplacé par $c\alpha/\lambda\beta$, on en déduit l'existence d'un (unique) élément μ de $\mathcal{P}$ tel que

$$\boxed{\mu \mathbf{P} = \mu}$$

On sait grâce au résultat de la question 1 que

$$\frac{c\alpha}{\lambda\beta} \in]0; 1]$$

Notons alors

$$\gamma = 1 - \frac{c\alpha}{\lambda\beta}$$

qui est un élément de $[0; 1[$. Utilisons maintenant le résultat de la question 7 avec les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$

$$e_1 = (1 \ 0 \ \cdots \ 0) \ \dots \ e_d = (0 \ \cdots \ 0 \ 1)$$

qui sont des éléments de $\mathcal{P}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$. D'une part,

$$\|e_i P^n - \mu\|_1 \leq 2\gamma^n$$

D'autre part,

$$e_i P^n - \mu = ((P^n)_{i,j} - \mu_j)_{1 \leq j \leq d}$$

d'où

$$\|e_i P^n - \mu\|_1 = \sum_{j=1}^d |(P^n)_{i,j} - \mu_j|$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=1}^d |(P^n)_{i,j} - \mu_j| \leq 2\gamma^n$$

On a vu dans la question précédente que

$$(P^n)_{i,j} = \frac{(M^n)_{i,j} h_j}{\lambda^n h_i}$$

et en exploitant le fait que

$$\forall k \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad 0 < \alpha \leq h_k \leq \beta$$

on obtient

$$\sum_{j=1}^d \frac{h_j}{h_i} \left| \frac{(M^n)_{i,j}}{\lambda^n} - \frac{\mu_j h_i}{h_j} \right| \leq 2\gamma^n$$

puis

$$\sum_{j=1}^d \left| \frac{(M^n)_{i,j}}{\lambda^n} - \frac{\mu_j h_i}{h_j} \right| \leq 2 \times \frac{\beta}{\alpha} \times \gamma^n$$

Enfin, en sommant ces inégalités pour $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ et en définissant $C = 2d\beta/\alpha$ qui est strictement positif, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left| \frac{(M^n)_{i,j}}{\lambda^n} - \frac{\mu_j h_i}{h_j} \right| \leq C\gamma^n$$

10b

Commençons par énoncer un fait qui sera utile ici et pour la question 12a. Nous avons montré que μ désigne l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que $\mu P = \mu$. Cela implique que

$$\{\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \tau P = \tau\} = \{a\mu\}_{a \in \mathbb{R}_+}$$

En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a $a\mu \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+)$ et $a\mu P = a\mu$ donc

$$\{\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \tau P = \tau\} \supset \{a\mu\}_{a \in \mathbb{R}_+}$$

Soit $\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+)$ tel que $\tau P = \tau$. Notons

$$a = \tau_1 + \cdots + \tau_d$$

Si $\tau = 0_{1,d}$, alors $a = 0$ et $\tau = a\mu$. Si $\tau \neq 0_{1,d}$, alors a est strictement positif et la matrice ligne $\tilde{\tau} = a^{-1}\tau$ est un élément de $\mathcal{P}$ tel que $\tilde{\tau}P = \tilde{\tau}$. Par unicité de μ , il vient $\tilde{\tau} = \mu$ puis $\tau = a\mu$. Donc

$$\{\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \tau P = \tau\} \subset \{a\mu\}_{a \in \mathbb{R}_+}$$

On a bien l'égalité annoncée.

Supposons maintenant que π désigne un élément de $\mathcal{P}$ tel que

$$\{\sigma \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \sigma M = \sigma\} = \{a\pi\}_{a \in \mathbb{R}_+}$$

et montrons que π est l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que $\pi M = \pi$. On a $\pi = 1\pi$ donc $\pi M = \pi$. Supposons maintenant que σ désigne un élément de $\mathcal{P}$ tel que $\sigma M = \sigma$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sigma = a\pi$. Par suite,

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \sigma_j = a\pi_j$$

puis
$$\sum_{j=1}^d \sigma_j = a \sum_{j=1}^d \pi_j$$

et comme σ et π sont des éléments de $\mathcal{P}$, il s'ensuit $a = 1$. Ainsi, $\sigma = \pi$. Par conséquent, π est l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que $\pi M = \pi$.

Soient $\sigma \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+)$ et $\tau = (\sigma_1 h_1 \ \cdots \ \sigma_d h_d)$. On a $h_1, \dots, h_d$ et λ strictement positifs,

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad (\sigma M)_j = \sum_{i=1}^d \sigma_i M_{i,j}$$

et
$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad M_{i,j} = \lambda \times \frac{h_i P_{i,j}}{h_j}$$

donc
$$\begin{aligned} \sigma M = \lambda \sigma &\iff \forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \sum_{i=1}^d \sigma_i M_{i,j} = \lambda \sigma_j \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \sum_{i=1}^d \sigma_i \times \frac{h_i P_{i,j}}{h_j} = \sigma_j \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \sum_{i=1}^d \tau_i P_{i,j} = \tau_j \end{aligned}$$

$$\sigma M = \lambda \sigma \iff \tau P = \tau$$

Or, μ est l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que $\mu P = \mu$ donc

$$\{\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \tau P = \tau\} = \{a\mu\}_{a \in \mathbb{R}_+}$$

et ainsi
$$\begin{aligned} \{\sigma \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}_+) \mid \sigma M = \lambda \sigma\} &= \left\{ a \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_d \\ h_1 & & h_d \end{pmatrix} \right\}_{a \in \mathbb{R}_+} \\ &= \{b\pi\}_{b \in \mathbb{R}_+} \end{aligned}$$

avec
$$\pi = \frac{1}{\frac{\mu_1}{h_1} + \cdots + \frac{\mu_d}{h_d}} \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_d \\ h_1 & & h_d \end{pmatrix}$$

qui est élément de $\mathcal{P}$. Finalement,

$\pi \text{ est l'unique élément de } \mathcal{P} \text{ tel que } \pi M = \lambda \pi.$

- 11** | L'objet de cette question est l'étude d'un polynôme noté P , ce qui est un peu ennuyeux car cette notation est déjà utilisée pour une matrice.

Raisonnons par récurrence sur le degré du polynôme P . Pour tout entier $d \geq 1$, soit $\mathcal{Q}(d)$ la proposition suivante : pour tout $(c_0, \dots, c_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^d$, en notant

$$P = X^d - c_{d-1}X^{d-1} - \dots - c_1X - c_0$$

il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} P(x) < 0 & \text{si } x < x_0 \\ P(x) = 0 & \text{si } x = x_0 \\ P(x) > 0 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

autrement dit tel que le signe de P vérifie

x	0	x_0	$+\infty$
$P(x)$	—	0	+

- Soient $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $P = X - c_0$. On a le tableau de signes suivant

x	0	c_0	$+\infty$
$x - c_0$	—	0	+

Donc $x_0 = c_0$ convient. Ainsi, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

- $\mathcal{Q}(d) \implies \mathcal{Q}(d+1)$: Soit $d \in \mathbb{N}^*$; on suppose $\mathcal{Q}(d)$ vraie. Soient $(c_0, \dots, c_d)$ un élément de $(\mathbb{R}_+^*)^{d+1}$ et le polynôme

$$P = X^{d+1} - c_d X^d - \dots - c_1 X - c_0$$

On a $P' = (d+1)(X^d - c'_{d-1}X^{d-1} - \dots - c'_1X - c'_0)$

avec $\forall k \in \llbracket 0; d-1 \rrbracket \quad c'_k = \frac{(k+1)c_{k+1}}{d+1} \in \mathbb{R}_+^*$

En appliquant la proposition $\mathcal{Q}(d)$ au polynôme

$$Q = \frac{1}{d+1} P' = X^d - c'_{d-1}X^{d-1} - \dots - c'_1X - c'_0$$

on en déduit l'existence d'un $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ de sorte que le signe de Q vérifie

x	0	x_0	$+\infty$
$Q(x)$	—	0	+

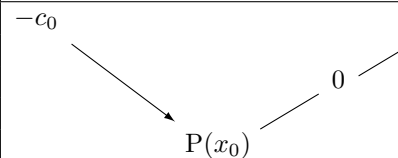
Étant donné que P' et Q ont le même signe, la fonction polynomiale associée à P est strictement décroissante sur $[0; x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$. Appliquons maintenant le théorème de la bijection à cette fonction polynomiale sur $[x_0; +\infty[$:

- La fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[x_0; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto P(x)$ est strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$.
- On a $P(0) = -c_0 < 0$ donc par décroissance, $P(x_0) < 0$. Ensuite,

$$P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{d+1}$$

donc $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Ainsi, il existe un unique $x_1 \in]x_0; +\infty[$ tel que $P(x_1) = 0$. Résumons tout cela dans le tableau suivant :

	0	x_0	x_1	$+\infty$
P'	—	0	+	+
P	$-c_0$			
P	—	0	+	

avec $-c_0$ et donc $P(x_0)$ strictement négatifs. Ainsi, $\mathcal{Q}(d+1)$ est vraie.

- Conclusion : Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(d)$ est vraie.

En particulier,

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(c_0, \dots, c_{d-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^d$, le polynôme

$$X^d - c_{d-1}X^{d-1} - \dots - c_1X - c_0$$

possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

12a Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$, on a

$$\tau M = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \tau_k a_k & \tau_1 b_1 & \cdots & \tau_{d-1} b_{d-1} \end{pmatrix}$$

donc

$$\lambda \tau = \tau M \iff \begin{cases} \lambda \tau_1 &= \sum_{k=1}^d \tau_k a_k \\ \lambda \tau_2 &= \tau_1 b_1 \\ \vdots & \\ \lambda \tau_d &= \tau_{d-1} b_{d-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda \tau_1 &= \sum_{k=1}^d b_1 \cdots b_{k-1} a_k \tau_1 / \lambda^{k-1} \\ \tau_2 &= b_1 \tau_1 / \lambda \\ \vdots & \\ \tau_d &= b_1 \cdots b_{d-1} \tau_1 / \lambda^{d-1} \end{cases}$$

$$\lambda \tau = \tau M \iff \begin{cases} P(\lambda) \tau_1 &= 0 \\ \tau_2 &= b_1 \tau_1 / \lambda \\ \vdots & \\ \tau_d &= b_1 \cdots b_{d-1} \tau_1 / \lambda^{d-1} \end{cases}$$

avec

$$P = X^d - \sum_{k=1}^d b_1 \cdots b_{k-1} a_k X^{d-k}$$

où lorsque $k = 1$, on a utilisé la convention usuelle

$$b_1 \cdots b_{k-1} = \prod_{i=1}^{k-1} b_i = 1$$

Les réels $a_1, \dots, a_d$ et $b_1, \dots, b_{d-1}$ étant tous strictement positifs, on peut appliquer le résultat de la question précédente au polynôme P . Par conséquent, P admet une unique racine λ_0 dans $\mathbb{R}_+^*$. Si $\lambda \neq \lambda_0$, alors $P(\lambda) \neq 0$ et $\tau = 0_{1,d}$ est l'unique élément de $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ tel que $\tau M = \lambda \tau$. Il n'existe donc pas d'élément $\pi \in \mathcal{P}$ tel que $\pi M = \lambda \pi$ dans le cas où $\lambda \neq \lambda_0$. En revanche, si $\lambda = \lambda_0$, alors l'ensemble des éléments τ de $\mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ tels que $\tau M = \lambda \tau$ est

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{\lambda_0} & \cdots & \frac{b_1 \cdots b_{d-1}}{\lambda_0^{d-1}} \end{pmatrix} \right\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{\lambda_0} & \cdots & \frac{b_1 \cdots b_{d-1}}{\lambda_0^{d-1}} \end{pmatrix} \right\}_{\alpha \in \mathbb{R}} &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} \lambda_0^{d-1} & b_1 \lambda_0^{d-2} & \cdots & \prod_{k=1}^{d-1} b_k \end{pmatrix} \right\}_{\beta \in \mathbb{R}} \\ &= \text{Vect}(\pi) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \pi = \frac{1}{\lambda_0^{d-1} + b_1 \lambda_0^{d-2} + \cdots + \prod_{k=1}^{d-1} b_k} \begin{pmatrix} \lambda_0^{d-1} & b_1 \lambda_0^{d-2} & \cdots & \prod_{k=1}^{d-1} b_k \end{pmatrix}$$

qui est bien élément de $\mathcal{P}$. En adaptant le résultat préliminaire de la question 10b, on en déduit que π est l'unique élément de $\mathcal{P}$ tel que $\pi M = \lambda_0 \pi$. Finalement,

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (\lambda, \pi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{P} \text{ tel que } \pi M = \lambda \pi.}$$

Montrons que P est le polynôme caractéristique de la matrice M . Étant donné deux suites réelles $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, considérons la suite de matrices $(M_d)_{d \geq 2}$ où pour tout $d \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$,

$$M_d = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{d-1} \\ a_d & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et notons χ_d le polynôme caractéristique de M_d . Montrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{Q}(d): \quad \chi_d = X^d - \sum_{k=1}^d a_k \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \right) X^{d-k}$$

est vraie pour tout entier $d \geq 2$.

- Pour tout réel x , on a

$$\chi_2(x) = \begin{vmatrix} x - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & x \end{vmatrix} = x^2 - a_1 x - a_2 b_1$$

$$\text{Ainsi } \chi_2 = X^2 - a_1 X - a_2 b_1$$

Par conséquent, $\mathcal{Q}(2)$ est vraie.

- $\mathcal{Q}(d-1) \implies \mathcal{Q}(d)$: Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$; supposons $\mathcal{Q}(d-1)$ vraie. Fixons un réel x . On a

$$\begin{aligned}\chi_d(x) &= \det(xI_n - M_d) \\ &= \begin{vmatrix} x - a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -b_{d-1} \\ -a_d & 0 & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Développons ce déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}\chi_d(x) &= b_{d-1} A + x \chi_{d-1}(x) \\ \text{avec } A &= \begin{vmatrix} x - a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_2 & x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{d-2} & 0 & \cdots & 0 & x & -b_{d-2} \\ -a_d & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

En développant maintenant le déterminant A par rapport à la dernière ligne, on obtient le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure avec pour éléments diagonaux $-b_1, \dots, -b_{d-2}$ si bien que

$$\begin{aligned}A &= (-1)^d (-a_d) \times (-b_1) \times \cdots \times (-b_{d-2}) \\ &= -a_d \times b_1 \times \cdots \times b_{d-2}\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(d-1)$, on en déduit

$$\begin{aligned}\chi_d(x) &= x \chi_{d-1}(x) - a_d \times \prod_{\ell=1}^{d-1} b_\ell \\ &= x \left(x^{d-1} - \sum_{k=1}^{d-1} a_k \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \right) x^{d-1-k} \right) - a_d \times \prod_{\ell=1}^{d-1} b_\ell \\ \chi_d(x) &= x^d - \sum_{k=1}^d a_k \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \right) x^{d-k}\end{aligned}$$

Cela étant valable pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, $\mathcal{Q}(d)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\forall d \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} \quad \chi_d = X^d - \sum_{k=1}^d a_k \left(\prod_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \right) X^{d-k}$$

12b Dans cette question, dans un premier temps, nous déduirons de la relation $\pi M = \lambda \pi$ l'existence d'un unique vecteur propre de M associé à la valeur propre λ . Dans un deuxième temps, nous montrerons qu'un tel vecteur propre a tous ses coefficients non nuls et de même signe, ce qui permettra de les supposer tous strictement positifs. Enfin, il suffira de le normaliser de telle sorte que $\langle \pi, h \rangle = 1$.

En appliquant la transposition aux deux membres de l'égalité $\pi M = \lambda \pi$, on obtient $M^T \pi^T = \lambda \pi^T$. Le vecteur ligne π étant élément de $\mathcal{P}$, il est non nul, donc π^T est vecteur propre de M^T associé à la valeur propre λ . En outre, on a prouvé dans la question précédente que l'ensemble des vecteurs lignes $\tau \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ tels que $\tau M = \lambda \tau$ est $\text{Vect}(\pi)$. Par suite, le sous-espace propre de M^T associé à la valeur propre λ est $\text{Vect}(\pi^T)$ et il est de dimension 1. Montrons que λ est aussi valeur propre de M et que le sous-espace propre associé est de dimension 1. Appliquons le théorème du rang à $M^T - \lambda I_d$ afin d'obtenir

$$\text{rg}(M^T - \lambda I_d) = d - \dim(E_\lambda(M^T)) = d - 1$$

Le rang étant invariant par passage à la transposée, il vient $\text{rg}(M - \lambda I_d) = d - 1$. En appliquant cette fois le théorème du rang à $M - \lambda I_d$, on en déduit que λ est valeur propre de M et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Les matrices M et M^T ont le même polynôme caractéristique. En effet, pour tout réel x ,

$$\chi_M(x) = \det(xI_d - M) = \det(xI_d - M^T) = \chi_{M^T}(x)$$

car le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée. Les matrices M et M^T ont donc les mêmes valeurs propres.

Considérons maintenant $h \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{1,d}\}$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ de sorte que

$$E_\lambda(M) = \text{Vect}(h)$$

Montrons que les coefficients de h sont tous strictement positifs, ou tous strictement négatifs. Pour cela, prouvons que h_d est non nul puis que tous les coefficients de h ont le même signe que h_d . On a $Mh = \lambda h$ donc

$$\forall i \in \llbracket 1; d-1 \rrbracket \quad a_i h_1 + b_i h_{i+1} = \lambda h_i$$

et

$$a_d h_1 = \lambda h_d$$

Par l'absurde, supposons que $h_d = 0$. Considérons

$$I = \{i \in \llbracket 1; d \rrbracket \mid h_i \neq 0\}$$

qui est non vide car $h \neq 0_{1,d}$. On a $h_d = 0$ donc d n'est pas élément de I , et ainsi, I est une partie non vide de $\llbracket 1; d-1 \rrbracket$. L'ensemble I admet donc un plus grand élément noté i_0 avec $i_0 \in \llbracket 1; d-1 \rrbracket$. Cependant, $a_d h_1 = \lambda h_d$ et a_d est strictement positif donc $h_1 = 0$. De plus, le réel b_{i_0} est non nul si bien que

$$h_{i_0+1} = \frac{\lambda h_{i_0} - a_{i_0} h_1}{b_{i_0}} \neq 0$$

Par suite, $i_0 + 1 \in I$. Mais cela contredit la maximalité de i_0 . Ainsi, h_d est non nul.

Montrons maintenant que tous les coefficients de h ont le même signe que h_d . Considérons

$$J = \{j \in \llbracket 1; d \rrbracket \mid h_j h_d \leq 0\}$$

et montrons que $J = \emptyset$. Par l'absurde, supposons $J \neq \emptyset$. On a $h_d \neq 0$ donc $d \notin J$ et ainsi, $J \subset \llbracket 1; d-1 \rrbracket$. L'ensemble J est une partie non vide de $\llbracket 1; d-1 \rrbracket$ donc admet un plus grand élément noté j_0 avec $j_0 \in \llbracket 1; d-1 \rrbracket$. Ensuite $a_d h_1 = \lambda h_d$ avec λ et a_d strictement positifs d'où

$$h_1 h_d = \frac{\lambda h_d^2}{a_d} > 0$$

puis
$$h_{j_0+1}h_d = \frac{\lambda h_{j_0}h_d - a_{j_0}h_1h_d}{b_{j_0}} \leq 0$$

car b_{j_0} , a_{j_0} , λ et h_1h_d sont (strictement) positifs et car $h_{j_0}h_d \leq 0$. Dès lors, $j_0 + 1$ est élément de J . Mais cela contredit la maximalité de j_0 . Ainsi, $J = \emptyset$. En d'autres termes,

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad h_j h_d > 0$$

Par conséquent, les coefficients de h sont bien tous strictement positifs, ou tous strictement négatifs. Quitte à remplacer h par $-h$, on a h qui est un élément de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ tel que

$$E_\lambda(M) = \text{Vect}(h)$$

Enfin, $\pi \in \mathcal{P}$ donc les coefficients de π sont positifs et en notant $k_0 \in \llbracket 1; d \rrbracket$ tel que $\pi_{k_0} > 0$, il vient

$$\langle \pi, h \rangle = \sum_{i=1}^d \pi_i h_i \geq \pi_{k_0} h_{k_0} > 0$$

et le vecteur colonne
$$\tilde{h} = \frac{1}{\langle \pi, h \rangle} h$$

satisfait $\tilde{h} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$, $E_\lambda(M) = \text{Vect}(\tilde{h})$, et par linéarité du produit scalaire par rapport à sa seconde composante,

$$\langle \pi, \tilde{h} \rangle = \left\langle \pi, \frac{1}{\langle \pi, h \rangle} h \right\rangle = \frac{\langle \pi, h \rangle}{\langle \pi, h \rangle} = 1$$

On a vu dans la question précédente qu'en fait tous les coefficients de π sont strictement positifs.

Ainsi, en remplaçant la notation $\tilde{h}$ par h , on en conclut qu'il existe $h \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $Mh = \lambda h$ et $\langle \pi, h \rangle = 1$. Reste à vérifier l'unicité d'un tel h . Supposons que h' désigne un élément de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ vérifiant $Mh' = \lambda h'$ et $\langle \pi, h' \rangle = 1$. On a $E_\lambda(M) = \text{Vect}(h)$ donc il existe un réel a tel que $h' = ah$. D'une part, $\langle \pi, h' \rangle = 1$, d'autre part, par linéarité du produit scalaire selon la deuxième composante,

$$\langle \pi, h' \rangle = \langle \pi, ah \rangle = a \langle \pi, h \rangle = a$$

On en déduit que $a = 1$ puis que $h' = h$. Finalement,

Il existe un unique $h \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $Mh = \lambda h$ et $\langle \pi, h \rangle = 1$.

12c La matrice M est à coefficients dans $\mathbb{R}_+$. De plus, on vient de montrer qu'elle possède une valeur propre $\lambda > 0$ et un vecteur propre associé $h \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}_+^*)$. Par ailleurs, en considérant

$$\nu = (\delta_{1,j})_{1 \leq j \leq d} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

qui est un élément de $\mathcal{P}$ et $c = \min(a_1, \dots, a_d)$ qui est strictement positif, on obtient

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad M_{i,j} \geq c \nu_j$$

Dès lors, on peut utiliser la propriété démontrée dans la question 10a. Il existe $\mu \in \mathcal{P}$, $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in [0; 1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left| \frac{(M^n)_{i,j}}{\lambda^n} - \frac{\mu_j h_i}{h_j} \right| \leq C \gamma^n$$

La somme double étant à termes positifs, il vient

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \left| \frac{(M^n)_{i,j}}{\lambda^n} - \frac{\mu_j h_i}{h_j} \right| \leq C \gamma^n$$

En outre,

$$C \gamma^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc par encadrement

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad \frac{(M^n)_{i,j}}{\lambda^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\mu_j h_i}{h_j}$$

Autrement dit,

La suite $(\lambda^{-n} M^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $\left(\frac{\mu_j h_i}{h_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$

La convergence ne dépendant point des premiers termes, on a le même résultat pour la suite $(\lambda^{-n} M^n)_{n \in \mathbb{N}}$