

Les quatre parties sont indépendantes entre elles.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Notations

Dans l'ensemble du sujet m et n désignent des entiers strictement positifs. L'ensemble $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$ et son conjugué est noté $\bar{z}$. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé, et $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à m lignes et à n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à n lignes et à n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est notée $A^\top$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n-1}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\bar{A}^\top \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la matrice $(\bar{a}_{j,i})_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}}$.

On dit qu'une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *unitaire* si

$$U\bar{U}^\top = \bar{U}^\top U = I_n.$$

Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_0, \dots, x_{n-1}$. Un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sera vu comme un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice $x^\top y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$. Nous munissons $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 = 1}} \|Ax\|_2.$$

Par convention, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $A^0 = I_n$.

* * *

Préliminaires

Les résultats démontrés ici seront utiles dans la première partie.

1. Lorsque $x \in \mathbb{C}^n$, vérifier que $\|x\|_2^2 = \bar{x}^\top x$.
2. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire. Montrer que $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.
3. Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $d_0, \dots, d_{n-1}$, montrer que $\|D\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} |d_i|$.
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = UAU^{-1}$. Montrer que $\|A\| = \|B\|$.

Première partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Alors

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| = \sup_{z \in \mathbb{S}} |f(z)|.$$

Pour cela, on admet le résultat suivant, qui pourra être utilisé sans démonstration.

A) Si $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ est une matrice unitaire, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, dont tous les coefficients diagonaux ont module 1, et une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ telles que $M = UDU^{-1}$.

Pour démontrer le **Théorème 1**, on fixe un polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On considère un nombre complexe $z \in \mathbb{D}$ et on définit les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ par

$$M = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{z} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{z} \\ 0 & & & & & 0 \\ \vdots & & & \text{I}_{n-1} & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que M est une matrice unitaire.
6. Montrer que $z^k = P^* M^k P$ pour tout entier $0 \leq k \leq n$.
7. Montrer que $|f(z)| \leq \|f(M)\|$.
8. Démontrer le **Théorème 1**.

Deuxième partie

Le but de cette partie est de démontrer l'énoncé suivant (on pourra utiliser le **Théorème 1**).

Théorème 2. Soit $n \geq 1$ un entier et $A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polynôme non nul tel que $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Alors pour tout entier $L \geq 1$ on a

$$\sup_{\theta \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]} |A(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{n^{L-1}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on fixe un entier $n \geq 1$ et $A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polynôme tel que $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. On fixe également un entier $L \geq 1$.

9. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| = 1$, montrer que $|A(z)| \leq n$.
10. On suppose dans cette question que $a_0 = 1$, et on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \prod_{j=0}^{L-1} A\left(ze^{\frac{2i\pi j}{L}}\right).$$

- a. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = 1$ et $|F(z_0)| \geq 1$.
- b. Montrer que $|F(z_0)| \leq n^{L-1} \cdot \sup_{\theta \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]} |A(e^{i\theta})|$.
11. Démontrer le **Théorème 2**.