

Matrices symplectiques

Notations

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbf{N}^*$.

- Dans $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ espace vectoriel réel de dimension n , on utilisera le produit scalaire canonique défini par :

$$\forall U, V \in \mathcal{E}_n, \quad (U|V) = {}^tUV.$$

- On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\ker A$, le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.
- Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté $\det$.
- $\mathcal{G}_n = \mathcal{GL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n, \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n, {}^tMM = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal d'indice n , formé des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$.
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$, on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}.$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det(A) \det(D).$$

I Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

On note

$$\mathcal{Sp}_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}, {}^tMJM = J\}.$$

1. Calculer J^2 et tJ en fonction de I_{2n} et J . Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathcal{Sp}_{2n}$ et que pour tout réel α ,

$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathcal{Sp}_{2n}.$$
3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}$ est dans $\mathcal{Sp}_{2n}$.
4. Si $M \in \mathcal{Sp}_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.
5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{Sp}_{2n}$ est un élément de $\mathcal{Sp}_{2n}$.
6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{Sp}_{2n}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{Sp}_{2n}$.
7. Montrer que si $M \in \mathcal{Sp}_{2n}$ alors ${}^tM \in \mathcal{Sp}_{2n}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$

8. Déterminer des relations sur A, B, C et D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{Sp}_{2n}$.

II Centre de $\mathcal{Sp}_{2n}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{Sp}_{2n}$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{Sp}_{2n}, \forall N \in \mathcal{Sp}_{2n}, MN = NM\}.$$

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$

10. En utilisant $L = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.

11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.

12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{ij}$ commutent avec A , où $(E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.

III Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathcal{Sp}_{2n}$ que l'on décompose sous forme de matrices blocs

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

14. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det({}^tAD - {}^tCB) = 1.$$

Soit $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que tPQ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que :

$$(Q - s_1P)V_1 = (Q - s_2P)V_2 = 0.$$

15. Montrer que le produit scalaire $(QV_1|QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

16. Montrer que $\ker B \cap \ker D = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leq n$. Soit $s_1, \dots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \dots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_iB)V_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m.$$

17. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i, i = 1, \dots, m)$ forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.

18. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19. Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{Sp}_{2n}$ est de déterminant égal à 1.

FIN DU PROBLÈME