

I. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE $F = \theta(f)$

Certaines questions de cette partie peuvent sembler très simples. Cependant, il faut bien faire attention à en rédiger les réponses correctement. Par exemple, avant de calculer la dérivée d'une fonction, on doit *systématiquement* préciser que f est bien dérivable.

Il est également très mal vu, par exemple, de confondre la *fonction* f avec l'image d'un élément $f(t)$ par cette même fonction.

I.1.1 Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_x^{x+1} 1 \, dt = [t]_x^{x+1} = x + 1 - x = 1$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 1}$$

I.1.2 Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_x^{x+1} t^k \, dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_x^{x+1}$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}}$$

I.2.1 Notons φ une primitive de f . Comme f est continue, φ est $\mathcal{C}^1$. De plus, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

Par composition et addition de fonctions $\mathcal{C}^1$, F est $\mathcal{C}^1$. En outre, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \varphi'(x+1) - \varphi'(x)$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x+1) - f(x)}$$

I.2.2 Supposons que f soit croissante sur un intervalle $[x_0; +\infty[$. Alors

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x+1) \geq f(x)$$

d'où

$$\forall x \geq x_0 \quad F'(x) = f(x+1) - f(x) \geq 0$$

donc F est croissante sur $[x_0; +\infty[$. On en déduit

$$\boxed{f \text{ croissante sur } [x_0; +\infty[\implies F \text{ croissante sur } [x_0; +\infty[}$$

On montre de même que

$$\boxed{f \text{ décroissante sur } [x_0; +\infty[\implies F \text{ décroissante sur } [x_0; +\infty[}$$

I.2.3 La fonction F étant $\mathcal{C}^1$, on a

$$\begin{aligned} F \text{ constante} &\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x) \end{aligned}$$

d'où

$$F \text{ constante} \iff f \in \mathcal{C}_1^0$$

I.2.4 Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+1) &= |\sin(\pi(t+1))| \\ &= |\sin(\pi t + \pi)| \\ &= |-\sin(\pi t)| \\ &= |\sin(\pi t)| \\ f(t+1) &= f(t) \end{aligned}$$

On en déduit que f appartient à $\mathcal{C}_1^0$, donc que F est constante d'après la question I.2.3. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^1 |\sin(\pi t)| \, dt \\ &= \int_0^1 \sin(\pi t) \, dt \end{aligned}$$

car $t \mapsto \sin(\pi t)$ est positive sur $[0; 1]$; d'où

$$F(0) = \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

F étant constante, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = \frac{2}{\pi}$$

Les valeurs absolues posent souvent des problèmes à de nombreux étudiants. Bien souvent, la *seule* chose à connaître sur la valeur absolue est sa définition :

- si $v > 0$ alors $|v| = v$
- et si $v < 0$ alors $|v| = -v$

Ensuite, pour manipuler $|v|$, on est bien souvent amené à étudier deux cas, selon que $v > 0$, ou que $v \leq 0$. Par exemple, pour calculer l'intégrale de $|f|$ sur un intervalle I , on commence par déterminer les sous-intervalles I_k de I sur lesquels

$$\forall t \in I_k \quad f(t) > 0$$

et on note $A = \cup I_k$. On peut ensuite écrire

$$\begin{aligned} \int_I |f| &= \int_A |f| + \int_{I \setminus A} |f| \\ &= \int_A f - \int_{I \setminus A} f \end{aligned}$$

I.2.5 Supposons d'abord que f admet une limite nulle en $+\infty$. Montrons que F admet également une limite nulle en $+\infty$. Pour cela, on utilise la définition de la limite de f en $+\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad x \geq A_\varepsilon \implies |f(x)| \leq \varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \int_x^{x+1} f(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_x^{x+1} |f(t)| \, dt \\ &\leq \int_x^{x+1} \varepsilon \, dt && \text{si } x \geq A_\varepsilon \\ |F(x)| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad x \geq A_\varepsilon \implies |F(x)| \leq \varepsilon$$

ou encore

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$$

Supposons maintenant que f admette une limite non nulle L_1 en $+\infty$. Alors $t \mapsto f(t) - L_1$ tend vers 0 en $+\infty$. D'après ce que l'on vient de faire, $\theta(f - L_1)$ admet une limite nulle en $+\infty$. En outre, $\theta(L_1) = L_1$ d'après la question I.1.1. On en déduit

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L_1}$$

I.3.1 Dans l'expression $\psi(u) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t) \, dt$, effectuons le changement de variable $v = -t$, pour trouver

$$\psi(u) = \int_{-u+\frac{1}{2}}^{-u-\frac{1}{2}} f(-v) \, (-dv) = \int_{-u-\frac{1}{2}}^{-u+\frac{1}{2}} f(-v) \, dv \quad (\star)$$

Si f est paire, alors

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f(u) = f(-u)$$

L'équation $(\star)$ devient donc

$$\psi(u) = \int_{-u-\frac{1}{2}}^{-u+\frac{1}{2}} f(v) \, dv = \psi(-u)$$

Par ailleurs, si f est impaire

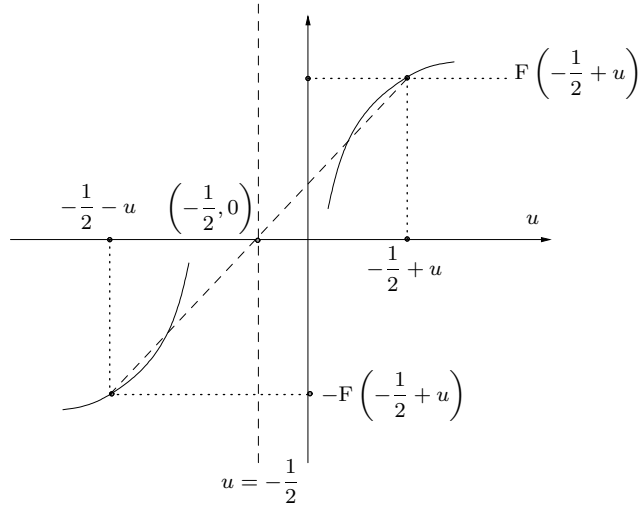
$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f(u) = -f(-u)$$

L'équation $(\star)$ devient ainsi

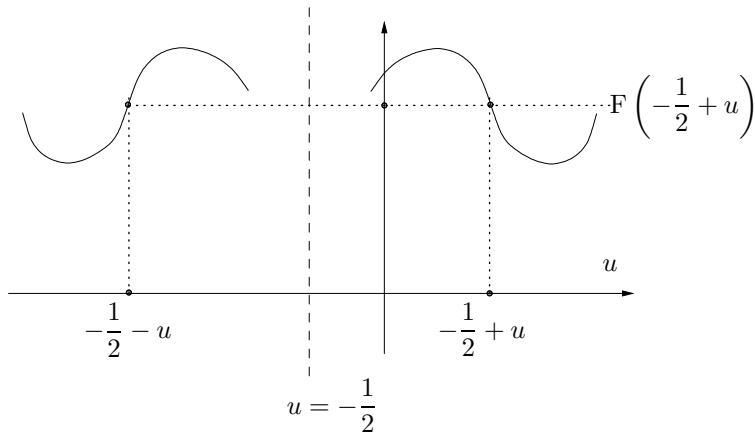
$$\psi(u) = - \int_{-u-\frac{1}{2}}^{-u+\frac{1}{2}} f(v) \, dv = -\psi(-u)$$

Si f est impaire, alors ψ est impaire et, si f est paire, alors ψ est paire.

I.3.2 Si f est impaire, alors ψ , c'est-à-dire $u \mapsto F(u - 1/2)$ est impaire. On en déduit que le graphe de F admet un centre de symétrie qui est $(-1/2, 0)$.



Si f est paire, alors ψ , c'est-à-dire $u \mapsto F(u - 1/2)$ est impaire. On en déduit que le graphe de F admet la droite $u = -1/2$ pour axe de symétrie.



II. L'ENDOMORPHISME θ

II.1 D'après la question I.2.1, $\text{Im } \theta$ est inclus dans $\mathcal{C}^1$, qui est un sous-espace strict de $\mathcal{C}^0$ (par exemple, $x \mapsto |x|$ est continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

L'endomorphisme θ n'est pas surjectif.

II.2.1 On a

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker } \theta &\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(f)(x) = 0 \\ &\iff \theta(f) \text{ est constante et } \theta(f)(0) = 0 \end{aligned}$$

d'après la question I.2.3. Finalement

$$f \in \text{Ker } \theta \iff f \in \mathcal{C}_0^1 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 0$$

II.2.2.1 Pour tout entier non nul k , la fonction c_k est continue et, pour tout réel t

$$c_k(t+1) = \cos(2\pi k(t+1)) = \cos(2\pi kt + 2\pi) = \cos(2\pi kt) = c_k(t)$$

donc c_k appartient à $\mathcal{C}_0^1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \langle c_j | c_k \rangle &= \int_0^1 \cos(2\pi jt) \cos(2\pi kt) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \cos(2\pi(j+k)t) dt + \int_0^1 \cos(2\pi(j-k)t) dt \right) \end{aligned}$$

d'après la formule d'addition des arcs.

Or on sait que pour tout ℓ entier non nul

$$\int_0^1 \cos(2\pi \ell t) dt = \left[-\frac{\sin(2\pi \ell t)}{2\pi \ell} \right]_0^1 = 0$$

d'après la formule d'addition des arcs. Ainsi, si $j \neq k$ $\langle c_j | c_k \rangle = 0$. Si $j = k$ alors

$$\langle c_j | c_j \rangle = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$$

Finalement

$$\langle c_j | c_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = k \end{cases}$$

II.2.2.2 Pour tout entier non nul j , c_j appartient à $\mathcal{C}_1^0$. Ainsi d'après la question I.2.3, la fonction $\theta(c_j)$ est constante. De plus

$$\theta(c_j)(0) = \int_0^1 c_j(t) dt = \int_0^1 \sin(2\pi jt) dt = 0$$

Donc les c_j appartiennent à $\text{Ker } \theta$ et cette famille est libre car orthogonale et formée de vecteurs non nuls d'après la question II.2.2.1. Ainsi, l'ensemble $\text{Ker } \theta$ contient une famille libre de cardinal infini. On en déduit que

$\text{Ker } \theta$ est de dimension infinie.

II.2.3.1 Effectuons une intégration par parties sur W_n avec

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x) & \text{soit} & & u(x) &= \varphi_n(x) \\ v(x) &= \frac{1}{x} & \text{ce qui donne} & & v'(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

où les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit

$$W_n = \left[\frac{\varphi_n(x)}{x} \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt = \frac{\varphi_n(n+1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$$

Comme f appartient à $\mathcal{C}_1^0$, $\theta(f)$ est constante. Par suite

$$\begin{aligned} \varphi_n(n+1) &= \theta(f)(n) \\ &= \theta(f)(1) \\ \varphi_n(n+1) &= \varphi_0(1) \end{aligned}$$

d'où

$$W_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$$

II.2.3.2 Soit f appartenant à $\text{Ker } \theta$. Alors $\varphi_0(1) = 0$, d'après la question II.2.1.

Par suite
$$|W_n| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_n^{n+1} \frac{|\varphi_n(t)|}{t^2} dt$$

Par ailleurs sur $[n; n+1]$

$$|\varphi_n(x)| = \left| \int_n^x f(t) dt \right| \leq \int_n^x |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_n^x dt \leq \|f\|_\infty \int_n^{n+1} dt = \|f\|_\infty$$

Or la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est positive et intégrable sur $[1; +\infty[$. On en déduit que

$$|W_n| \leq \|f\|_\infty \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$$

d'où
$$\sum_{k=1}^n |W_k| \leq \sum_{k=1}^n \|f\|_\infty \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \|f\|_\infty \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^2}$$

Or la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^n |W_k| \leq \|f\|_\infty \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

La série $\sum |W_n|$ est donc convergente, puisqu'il s'agit d'une série positive dont les sommes partielles sont majorées. Finalement

Si $f \in \text{Ker } \theta$, la série $\sum W_n$ est absolument convergente.

II.2.3.3 On a vu à la question II.2.3.1 que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$$

et à la question II.2.3.2, on a montré que la série $\sum \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$ converge.

Pendant la résolution de la question II.2.3.2, on était soumis à l'hypothèse $f \in \text{Ker } \theta$. Cependant, celle-ci n'a jamais été utilisée pour montrer la convergence (absolue) de la série $\sum \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$. Il s'agit d'un résultat valide, que f soit ou non dans $\text{Ker } \theta$.

Comme f est dans $\mathcal{C}_0^1$, $\theta(f)$ est constante. En outre, $\theta(f)$ n'étant pas dans $\text{Ker } \theta$, on en déduit que $\theta(f)(1) \neq 0$, et donc que $\varphi_0(1) \neq 0$. Par ailleurs, $\sum 1/(n+1)$ est divergente. La série $\sum W_n$ est donc la somme d'une série convergente et d'une série divergente ; on en déduit qu'elle est divergente.

Si $f \notin \text{Ker } \theta$, la série $\sum W_n$ est divergente.
--