984. Soient A un ensemble de réels de cardinal $n \geqslant 2$ et $B = \{a + a',\ (a, a') \in A^2\}$.
a) Montrer que $2n - 1 \leqslant \text{Card}\, B \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.
b) Donner des exemples de parties pour lesquelles les bornes sont atteintes.
c) Généraliser à $B_k = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_k\ ;\ a_1, ..., a_k \in A\}$.

985. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

986. Déterminer les polynômes réels P vérifiant $P(X)P(X+1) = P(X^2)$.

987. ***a)*** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que ses racines rationnelles sont dans $\mathbb{Z}$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.
c) Montrer que $\cos(\pi\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

988. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k-i)}$.

989. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $(*)$ $(1+iX)^{2n+1} - (1-iX)^{2n+1} = 2iXQ_n(X)$.
a) Montrer qu'il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$. Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
b) Déterminer les racines de Q_n.
c) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(4 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

990. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. On pose $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$.
a) Montrer que Q est minoré sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que Q est positif sur $\mathbb{R}$.

991. L'union de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?

992. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

993. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \{S_1, \ldots, S_k\}$ l'ensemble des parties non vides de $\{1, \ldots, n\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_i \cap S_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S_i \cap S_j = \emptyset \end{cases}$. Déterminer le rang de A.

994. ***a)*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $|\text{rg}A - \text{rg}B| \leqslant \text{rg}(A+B) \leqslant \text{rg}A + \text{rg}B$.
b) Soit $(v_1, ..., v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} v_i (v_i)^T = I_n$. Montrer que $k \geqslant n$.

995. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A - B) \in \{-1, 0, 1\}$.

996. ***a)*** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}),\ A \mapsto f_A$ est un isomorphisme.
b) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, g(AB) = g(BA)$. Montrer que g est proportionnelle à la trace.
c) Soit h un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ h(AB) = h(BA)$. Montrer que h préserve la trace.

997. Trouver $\dim(\mathrm{Vect}(A))$ dans les deux cas suivants :
i) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^n = \mathrm{Diag}(1, 2)\}$ avec $n \geqslant 2$,
ii) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^2 = I_2\}$.

998. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A. Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

999. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.
a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\varphi_\sigma : s \mapsto s \circ \sigma$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
b) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E défini par $\forall i \in [\![1, n]\!]\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On pose $p_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$. Montrer que p_n est un projecteur et expliciter son image et son noyau.

1000. Soient $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\phi : P \in E \mapsto P - P'$.
a) Montrer que ϕ est bijectif de deux manières différentes.
b) Soit Q l'antécédent de P par ϕ. On suppose que $Q \geqslant 0$. Montrer que $P \geqslant 0$. Exprimer P en fonction de Q.

1001. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $(AB)^2 = AB$. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(B)$. Montrer que $BA = I_2$.

1002. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme linéaire sur E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On pose $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^T L^T = \lambda L^T$.
c) Trouver toutes les droites stables par l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1003. Soient $n \geqslant 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

1004. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -4\,\mathrm{id}$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

a) Déterminer le noyau et l'image de f. L'endomorphisme f est-il inversible ? Si c'est le cas, déterminer f^{-1}.
b) Montrer que n est nécessairement pair.
c) Pour $x \neq 0$, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre.
d) On suppose maintenant que $n = 4$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1005. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \operatorname{tr}(X)\, A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1006. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, (X, AX) est liée. Que dire de A ?
b) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

1007. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme nilpotent tel que tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u. Montrer que u est l'endomorphisme nul.

1008. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F), v = \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées : ***i)*** u est injective, ***ii)*** v est surjective, ***iii)*** $F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.

1009. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v)$ et $u^2 \circ v = u$.
a) Montrer que $v \circ u \circ v = v$.
b) Montrer que $u \circ v$ est un projecteur
c) Montrer que $u \circ v \circ u = u$ puis que $v^2 \circ u = v$.

1010. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
a) Que dire de la trace d'un projecteur de E ? Montrer que, pour p projecteur de E, $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E.
b) Soient p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

1011. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) \geqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(F)$.

1012. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v = F$.

1013. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que $\operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) + \dim(\operatorname{Ker} u)$.

b) On suppose que u est nilpotent d'indice p. Montrer que $\big(\dim(\operatorname{Ker} u^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante puis stationnaire.

1014. ***a)*** Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de trace nulle. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ telle que la famille (u, Au) soit libre.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1015. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{rg}(AB - BA) = 1$.
Montrer que $A(\operatorname{Ker}(B)) \subset \operatorname{Ker}(B)$ ou $A(\operatorname{Im}(B)) \subset \operatorname{Im}(B)$)

1016. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E. Prouver l'équivalence des trois assertions suivantes :
i) $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre,
ii) $u : x \in E \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$ est surjective,
iii) il existe $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $\det(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p} \neq 0$.

1017. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1018. Soient $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_n \\ a_1 & \ldots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

1019. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

1020. Redémontrer qu'une matrice diagonalisable a un polynôme annulateur scindé à racines simples.

1021. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Monter que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et qu'elle admet une unique valeur propre réelle strictement positive a.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Déterminer la nature de la série $\sum \sin(\pi a^n)$.

1022. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
b) Soient v et w dans $\mathcal{L}(E)$ tels que v est diagonalisable, w est nilpotent et $v \circ w = w \circ v$. Montrer que $v + w$ et v ont le même polynôme caractéristique.

1023. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre vide.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\operatorname{Ker} P(u) \neq \{0\}$.
b) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par u.
c) En déduire que tout endomorphisme de E admet un sous-espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.

1024. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

1025. Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $f \circ g = f + g$.
a) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.
b) On suppose de plus que f est diagonalisable. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.
c) Montrer qu'aucune valeur propre de $f \circ g$ n'appartient à $]\,0, 4\,[$.

1026. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

1027. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \operatorname{diag}(1, 2, -1, -1)$.

1028. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
a) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A.
b) Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

1029. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
a) Trouver une relation entre les valeurs propres de A et celles de B ainsi qu'entre les sous-espaces propres de A et ceux de B.
b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction des dimensions des sous-espaces propres de A.
c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

1030. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Peut-on trigonaliser A et B dans une même base ?

1031. Soient $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On pose $A = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
a) Quel est le rang de A ?
b) Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)\, A$.

c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(M) = 1$. Montrer qu'il existe $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ telles que $M = X^T Y$.
d) Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = 0_3$.
e) À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

1032. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_3$ et $M \neq I_3$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Donner ses valeurs propres.
b) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Montrer que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, j, j^2\}$ et que les multiplicités de j et j^2 sont les mêmes. Donner le spectre de M.
c) Montrer que A et M sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1033. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}*)^2$ tels que $\lambda \neq \mu$. On suppose : $I_n = A + B,\ M = \lambda A + \mu B,\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.
a) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver $\operatorname{Sp}(M)$.

1034. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
On note $\Psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MB - BM$.
a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Psi(A^k) = kA^k$. Calculer $\operatorname{tr}(A)$.
b) Montrer que si A n'est pas nilpotente alors Ψ a une infinité de valeurs propres. Conclure

1035. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.
a) On considère $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi : M \mapsto \operatorname{Tr}(A)M - \operatorname{Tr}(M)A$.
i) Trouver $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
ii) Déterminer les éléments propres de Φ.
iii) Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de Φ.
b) On considère $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Psi : M \mapsto \operatorname{Tr}(A)M + \operatorname{Tr}(M)A$.
i) Trouver les éléments propres de Ψ.
ii) Montrer que Ψ est bijective et déterminer sa réciproque.

1036. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $f_A(M) = AM$. Montrer que A et f_A ont les mêmes valeurs propres.

1037. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On cherche le nombre de solutions de l'équation $B^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Montrer que, si B est solution, alors $AB = BA$.
b) Montrer que si A est diagonalisable et a un sous-espace propre de dimension $\geqslant 2$ alors il y a une infinité de solutions.
c) Traiter le cas où A admet trois valeur propres réelles distinctes.

d) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

e) Cas général ?

1038. On note $D : P \mapsto P'$ l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et déterminer la matrice de l'endomorphisme induit par D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie non nulle stable par D.
i) Montrer qu'il existe un entier n et un polynôme R de degré n tel que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{R}_n[X]$.
ii) Montrer que la famille $(D^j(R))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est libre.
iii) En déduire que $F = \mathbb{R}_n[X]$.
iv) Expliciter tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par D.

1039. On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $\Phi(f)$ définie par : $\Phi(f)(0) = f(0)$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
b) Déterminer les valeurs propres de Φ et les espaces propres associés.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

1040. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$. Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

1041. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.
a) Montrer que $\dim(E) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.
b) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quelle est la dimension maximale de E ?

1042. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à $1, 2, \ldots, n$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

1043. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une limite $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $B^2 = B$, $BA = AB$. Déterminer $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$.
b) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\} \cup \{1\}$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de A alors $B = 0$.
c) Montrer que la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique de A est égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.

1044. Soient a, b deux réels et n un entier.
Montrer que $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nP$ est un endomorphisme et déterminer ses éléments propres. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

1045. ***a)*** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = I_n + A + A^3$. Montrer que A est un polynôme en B.
b) Le résultat de ***a)*** subsiste-t-il lorsque A est complexe ?

1046. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non trigonalisable. Montrer que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que l'une des conditions suivantes est réalisées :
i) A est $\mathbb{R}$-trigonalisable ; ***ii)*** A est $\mathbb{C}$-diagonalisable ;
iii) A est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1047. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Soit L l'ensemble $L = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \ldots, A^{n-1}x_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
b) En déduire que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base de L.

1048. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un automorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{u^k(x)\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ est fini.
a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = \mathrm{id}$.
b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

1049. Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle < 0$.
Montrer que toute sous-famille de $(u_1, ..., u_p)$ de cardinal $(p-1)$ est libre.

1050. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle.
a) Montrer qu'il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $AV \neq 0$ et $A^2V = 0$.
b) On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
Déterminer l'ensemble $\{\langle AX, X \rangle\ ;\ X \in \mathbb{R}^n\}$.
c) Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\{\langle BX, X \rangle\ ;\ X \in \mathbb{R}^n\} = \{0\}$.

1051. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels. Pour $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.
a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
b) Trouver une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
c) Soit H l'ensemble des $Q \in E$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(a_k) = 0$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
d) Pour $P \in E$, déterminer $d(P, H)$.

1052. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Préciser le spectre et les sous-espaces propres.

1053. ***a)*** Montrer que $\phi : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est symétrique pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{+} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Déterminer les valeurs propres de ϕ.
c) Montrer qu'il existe une unique base orthonormée de vecteurs propres $(P_0, \ldots, P_n)$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg P_k = k$ et $\langle P_k, X^k\rangle > 0$.
d) On pose $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ vérifie les propriétés de ***c)***.
Que peut-on en déduire ?
e) Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $]-1, 1[$.

1054. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\Phi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi_{a,b} : M \mapsto aM + bM^T$.
a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi_{a,b}$.
b) Déterminer $\mathrm{Tr}(\Phi_{a,b})$ puis son polynôme caractéristique.
c) À quelle condition $\Phi_{a,b}$ est-il un automorphisme ? Déterminer alors $\Phi_{a,b}^{-1}$.
d) L'endomorphisme $\Phi_{a,b}$ est-il autoadjoint ?

1055. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.
a) Montrer que toute valeur propre de A vérifie $\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ et que A est diagonalisable.
b) Montrer que n est multiple de 4.

1056. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, a et b deux vecteurs libres de E et $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.
a) Déterminer le noyau et l'image de f.
b) Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Aurait-on pu le prévoir sans étudier les éléments propres ?

1057. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX = 0$. Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.

1058. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de spectre $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\|X\|^4 \leqslant \langle AX, X\rangle \langle A^{-1}X, X\rangle$.
b) Montrer que $\langle AX, X\rangle \langle A^{-1}X, X\rangle \leqslant \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|X\|^4$.
d) Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0, \ldots, P_n)$ de E telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$ et $\langle P_k, X^k\rangle > 0$.

1059. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$. On note $\alpha(t) \leqslant \beta(t) \leqslant \gamma(t)$ les valeurs propres de $M(t)$.
a) Montrer que $\alpha(t) < 0 < \beta(t) < 2 < \gamma(t)$.
b) Montrer que, lorsque $t \to +\infty$, $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 2$ et que $\gamma(t) = t + O\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

1060. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si pour toute $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $P^{-1}MP$ est à diagonale nulle.

1061. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\sum_{i,j} m_{i,j}^2 = n, \quad \left|\sum_{i,j} m_{i,j}\right| \leqslant n, \quad n \leqslant \sum_{i,j} |m_{i,j}| \leqslant n\ln(n).$$

1062. Soient E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux. On considère $h = p \circ q$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par h.
b) Montrer que p et q sont autoadjoints.
c) On pose $F = \mathrm{Im}(q) + \mathrm{Ker}(p)$. Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$. En déduire que h est diagonalisable.
d) Montrer que le spectre de h est contenu dans le segment $[0, 1]$.

1063. Soient $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe une matrice C telle que $C^2 = A^{-1}$.
b) Montrer, en posant $D = CBC$, que $(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + (\det D)^{\frac{1}{n}}$.
c) En déduire que $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$.

1064. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. Étudier l'unicité d'une telle décomposition.

1065. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $ABA = B$ et $BAB = A$.
a) Montrer que $A^2 = B^2$.
b) On suppose que A est inversible. Montrer que A et B sont des symétries orthogonales qui commutent.
c) On ne suppose plus que A est inversible. Montrer que $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$ et $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$.

Analyse

1066. Les parties $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ,\ x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\right\}$ et $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ,\ 2x^2 - y(y-1) = 0\right\}$ sont elles fermées ? bornées ?

1067. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que $\forall x \in \Omega, \dfrac{\left\|u^{k+1}(x)\right\|}{\left\|u^k(x)\right\|} \xrightarrow[k \to +\infty]{} m$.

1068. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\{Q(A) \ ;\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
b) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.
c) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $\{Q(A) \ ;\ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il fermé ? borné ?

1069. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles convergeant vers a et b respectivement. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ab$.

1070. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = nu_n - 1$. Montrer que $u_1 = e - 1$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n = O(n^a)$.

1071. Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{p}} + \sqrt[n]{1+\dfrac{2}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\dfrac{p}{p}}\right)^n$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}$.

b) Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}$.

1072. On pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$ et $x_n = \min\{t > 0,\ S_n(t) = 0\}$.

a) Montrer que x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Étudier les variations et la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1073. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $x_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^{-1}$. Montrer que $x_n \sim \sqrt{2n}$.

1074. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n la solution de $e^x = n - x$. Limite, équivalent et développement asymptotique à deux termes de x_n.

1075. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = n^\alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$?

1076. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$.

1077. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k}$.

a) Montrer que (x_n) converge vers un réel ℓ à déterminer. Montrer que $x_n = \ell + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) Exprimer u_{2n} en fonction de v_{2n} et w_n.

c) Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

d) Établir la convergence de (u_n) et préciser sa limite.

1078. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $a_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrer que $\sum \dfrac{1}{a_n^2}$ converge.

1079. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f' \leqslant 0$ et $f(0) = 1$. On pose $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0. Étudier la nature de la série $\sum a_n$.

1080. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ et $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

1081. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n^{(0)} = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $R_n^{(1)} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ et pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $R_n^{(\ell)} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} R_k^{(\ell-1)}$. Justifier l'existence et étudier le signe de $R_n^{(\ell)}$. *Ind.* Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t$.

1082. Soit f une fonction continue et injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
En considérant $g_x : t \mapsto f(x+t) - f(x)$ montrer que f est strictement monotone.

1083. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'image de tout segment est un segment de même longueur.

1084. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^p)^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est continue si et seulement si f est linéaire.

1085. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

1086. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(*) : \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\,(x + y)\, f\,(x - y) = (f\,(x)\, f\,(y))^2$.
a) Donner toutes les valeurs que peut prendre $f\,(0)$.
b) Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f\,(x_0) = 0$, on a $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 0$. En déduire que si f s'annule en un point, f est identiquement nulle.
c) Trouver toutes les fonctions continues vérifiant $(*)$.

1087. Soient f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f\,(x) = g\,(x)$.

1088. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable et non nulle pour laquelle il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f'\,(x) \leqslant M f\,(x)$. Montrer que f ne s'annule pas.

1089. Montrer que $x \mapsto \cos(x)$ admet un unique point fixe. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f dérivable telle que $\cos = f \circ f$.

1090. Soit f une fonction telle que, pour $0 < x < 1$, $f\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$. Trouver $g \in \mathcal{C}^\infty\,(]-\infty, 1[)$ telle que $g\,|_{]0,1[}= f$.

1091. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in \,]a,b[$ tel que $f'(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

1092. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que $f = 0$.

1093. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telle que $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Déterminer, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\lim\limits_{x \to 0} g^{(k)}(x)$.

1094. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_x^a \exp\left(t^2\right) \mathrm{d}t = 1$. On définit alors $x \mapsto a(x)$. Montrer que a est $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le graphe de a est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

1095. Trouver un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t$.

1096. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \tan(x)\right) \mathrm{d}x$.

1097. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot$ Déterminer la limite de (nU_n).

1098. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0,1[$.

1099. Soit x un nombre complexe de module différent de 1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x - e^{it}}$:

- en utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$,
- par une autre méthode.

1100. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^{+*})$. On pose $m = \inf\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}\cdot$ Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_a^b fg\right)^2$.

1101. Soient $c \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \leqslant c + \displaystyle\int_0^x v(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \leqslant c \exp\left(\displaystyle\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

1102. Montrer qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π-périodique, on ait $\sup_{\mathbb{R}} |f| \leqslant A\int_0^{2\pi} |f| + B\int_0^{2\pi} |f'|$. L'inégalité subsiste-elle si on enlève une hypothèse.

1103. On considère une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on dispose de $x_0 \in]a,b[$, $y_0 > f(x_0)$ et qu'un cercle C de centre (x_0,y_0) passant par $(x_0, f(x_0))$ est au-dessus du graphe de f. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

1104. Soit $M : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'application $N : A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{1\leqslant i,j\leqslant 2} |a_{i,j}|$ est une norme.

Déterminer $\varphi(t) = N(M(t))$ et tracer le graphe de φ. La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

b) Déterminer la primitive Φ de φ telle que $\Phi(0) = 0$. Φ est-elle $\mathcal{C}^1$?

c) Soit F la primitive de M telle que $F(0) = 0$. Prouver $\forall t \geqslant 0, N(F(t)) \leqslant \Phi(t)$.

1105. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}\mathrm{d}x$?

1106. Pour $\alpha > 0$ déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(1 + \ln(\operatorname{sh} x^\alpha) - 2\operatorname{sh}(\ln(x^{^\alpha} + 1))\Big)\,\mathrm{d}x$.

1107. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln|1-x|\cos(\ln(x))}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln|1-x|\cos(\ln(x))}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$?

1108. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x|^x \,\mathrm{d}x$.

1109. Existence et calcul des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$.

1110. On considère $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$. Soit $f \in E$.

a) Montrer que $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, et que

$$I(f) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{f(t)^2}{\sin(\pi t)^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En considérant $\displaystyle\int_0^1 \left(\pi\frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t)\right)^2 \,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant \pi^2 \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

c) Déterminer les fonctions f pour lesquelles il y a égalité dans ***b)***.

1111. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2}\sin(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est nulle.

1112. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\ln(t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^{-t}}\right)\,\mathrm{d}t$.

1113. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, positive, décroissante et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Ind.* Considérer $\displaystyle\int_t^{2t} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1114. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

1115. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

a) Montrer que, pour tout $y \geqslant 0$, il existe un unique $x \geqslant 0$ tel que $A_n(x) = y$. On pose $f_n(y) = x$.

b) Étudier la monotonie de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que la suite converge simplement vers une fonction f.

c) Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) < 1$.

d) Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1116. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$.

a) Montrer que f est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$.

b) Montrer que f est continue et intégrable sur $[\,0\,;1\,]$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Montrer que f est dérivable. Est-elle de classe $\mathcal{C}^k$?

1117. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2x^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.

b) Déterminer la limite de f et un équivalent en $+\infty$.

c) Déterminer la limite de f et un équivalent en 0.

1118. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$. Déterminer les limites et équivalents de F en 0 et en $+\infty$.

1119. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-x)^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

On note $(*)$ la propriété : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ g\left(\dfrac{x}{2}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 4g(x)$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et 1-périodique.
b) Montrer que f vérifie $(*)$.
c) Montrer que, si g est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et vérifie $(*)$ alors g est nulle.
e) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

1120. Préciser le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} e^{-n} e^{in^2 x}$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle développable en série entière ?

1121. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum e^{-x} \dfrac{x^k}{k!}$.

1122. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x^\alpha e^{-n^2 x}$ puis $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Montrer que f_α est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Trouver les α pour lesquels la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
c) Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
d) Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

1123. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.
Trouver f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n$.

1124. Soit $f : x \in \,]-1,1[\, \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Montrer que f est développable en série entière.

1125. On s'intéresse à la série entière suivante : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ avec $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n}\, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
b) Déterminer le domaine de convergence de la série entière.
c) Déterminer la limite de f à la borne de droite du domaine de convergence.

1126. Soit N un entier qui n'est pas un carré parfait. On pose $a = \sqrt{N}$.

a) Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $na - p_n \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.
b) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(na\pi) > cn^{-1}$.

c) En déduire le rayon de convergence de $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.

1127. On pose $b_0=1$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}=-\dfrac{1}{n+2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}b_k$.

a) Montrer que, pour tout n, $|b_n|\leqslant n!$.

b) Pour $|z|<1$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_k}{k!}z^k=\frac{z}{e^z-1}$.

c) Montrer que $x\mapsto \operatorname{cotan}(x)-\dfrac{1}{x}$ est développable en série entière.

d) Quel est le lien entre les deux dernières questions ? On pourra poser $z=2i\pi x$.

1128. Soit $S: x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de S. Montrer que S est solution de l'équation différentielle $x(x-4)y'+(x+2)y=2$.

b) En déduire $S(x)$ pour tout $x\in]0,R[$.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$

1129. Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière en 0 vérifiant au voisinage de 0 : $\varphi'(x)=x+\varphi^2(x)$.

1130. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$.

a) Que dire de I_n ?

b) Montrer que (I_n) et (J_n) convergent vers la même limite. Trouver cette limite.

1131. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt[n]{1+t^n}}$. Montrer que chaque intégrale I_n est convergente puis déterminer la limite de la suite (I_n).

1132. Pour $n\geqslant 2$, on pose $I_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+\cdots+t^n}$.
Justifier que I_n existe puis déterminer un équivalent de I_n quand $n\to+\infty$.

1133. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=\dfrac{2^nx}{1+n2^nx^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$.

c) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

d) Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n.

1134. Soient $a > -1$ et $b > 0$. On définit les suites (I_n) et (J_n) par $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}}\,\mathrm{d}x$.

a) Étudier l'existence de J_n et en déduire celle de I_n.
b) Déterminer la limite de (J_n).
c) Exprimer J_n à l'aide de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et retrouver ainsi la limite de la suite.
d) Déterminer un équivalent de I_n à l'aide de J_n.

1135. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kp}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+2k}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

1136. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.
a) Déterminer la limite de (I_n).
b) Justifier l'existence de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$.
c) Montrer que $I_n \sim \dfrac{J}{n}$.
d) Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

1137. ***a)*** Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
b) On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = 2J$.
c) Exprimer J à l'aide de la somme d'une série.
d) On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Calculer J.

1138. On considère $J = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que J est bien définie et que $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. En déduire la valeur de J.

1139. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition et la limite en $+\infty$ de F.
b) Donner une expression simple de $F(x)$.

1140. Étudier $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{d}t$.

1141. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
b) Montrer que F est dérivable et calculer F'.
c) En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$.

1142. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - a^{-bt}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$, où $0 < a < b$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C$.
c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et conclure quant à la constante C.

1143. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.
b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle $(*)$: $y'' - y = f(x)$.
c) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $(*)$. A-t-on $g = h$?

1144. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Trouver le domaine de définition de F et exprimer F sans le signe intégral.

1145. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{x+1}}\mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition de F.
b) Montrer la continuité de F.
c) Pour $x \geqslant 1$, donner l'expression de $F(x)$.

1146. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)\,\mathrm{d}t$.
a) La fonction f est-elle bien définie ?
b) Écrire f comme la somme d'une série.
c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

1147. Pour $x > 0$, on pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}}\mathrm{d}t$.
a) Calculer $F'(x)$.
b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$, puis déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = +\infty$, puis déterminer un équivalent de F en 0.

1148. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$. Pour $x > 0$, on pose $N_f(x) = \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^x \,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$.

a) Montrer que N_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
c) Déterminer la limite $\dfrac{1}{x}\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^x \,\mathrm{d}t - 1\right)$ lorsque $x \to 0^+$.
d) Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \to 0$.

1149. Soit f une fonction continue de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$.
Ind. Considérer $g : t \mapsto \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$.

1150. Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.
a) Trouver les solutions de (E) développables en série entière et déterminer leur rayon de convergence.
b) Écrire ces fonctions à l'aide des fonctions usuelles.

1151. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) > 0$. Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : (i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = Ax(t)$, (ii) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non nulle telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ell(x(t)) = 0$.

1152. On définit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in E$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère le système d'équations différentielles $(L) : \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in [0,1]$, $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + u(t)$.
a) Résoudre le système (L).
b) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $\varphi_i(u)$ la valeur en $t = 1$ de la solution de la i-ème équation de (L) qui s'annule en $t = 0$. On note $\Phi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et que $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$.
c) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on définit un élément de F en posant $f_i : s \mapsto e^{\lambda_i(1-s)}$. Montrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre si et seulement si la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

1153. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Déterminer f.

1154. Déterminer les extrema de $f(x,y) = x\ln y - y\ln x$ pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

1155. Trouver les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Probabilités

1156. Une boite contient n boules numérotées de 1 à n. On tire des boules, une à une, avec remise, tant que le numéro de la boule tirée est supérieur au précédent. On note Z le nombre de boules tirées. Déterminer la loi de Z.

1157. Une urne contient deux boules. L'une est blanche et l'autre est soit blanche soit noire avec probabilité $1/2$. On tire successivement deux boules de l'urne sans remise. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au premier tirage ?

1158. Soient $a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = an$. On dispose de N boules indiscernables et n urnes numérotées de 1 à n. On dépose les N boules dans les urnes. On note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i est vide, et 0 sinon. On note Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = \dfrac{1}{n} Y_n$.
a) Donner la loi de T_i. Calculer l'espérance et la variance de T_i.
b) Calculer l'espérance et la variance de S_n. Étudier les limites de $(\mathbf{E}(S_n))$ et $(\mathbf{V}(S_n))$.

1159. Une panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une à une, on s'arrête lorsqu'on a mangé toutes les pommes vertes. Déterminer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

1160. On répartit N objets dans $N-1$ boites. Probabilité pour qu'aucune boite ne soit vide ?

1161. La durée de vie (en jours) d'une ampoule suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}\cdot$
a) Quelle est la durée de vie moyenne de cette ampoule ?
b) L'ampoule a déjà vécu n jours. Quelle est la durée de vie moyenne de cette ampoule à partir du n-ème jour ?

1162. On considère deux dés et, pour $i \in [\![1,6]\!]$, on note p_i (respectivement q_i) la probabilité que le premier dé (respectivement le second dé) donne le résultat i. On note P et Q les fonctions génératrices des deux dés. On note R la fonction génératrice de la somme des deux dés.
a) Donner R.
b) On suppose dorénavant que R est égale à la fonction génératrice de la somme de deux dés non pipés.
c) Quelles sont les racines de R ?
d) Montrer que les deux dés ne sont pas pipés.

1163. Dans un magasin, on a n caisses et np clients. Chaque client choisit une caisse de façon indépendante et avec la même probabilité pour chacune des caisses. On note X_i le nombre de clients à la caisse numéro i.
a) En écrivant X_i comme une somme de variables aléatoires indépendantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.
b) Pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

1164. Soient A et B deux événements. Montrer que $|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

1165. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
a) Montrer que $Y + 1 - X$ et X ont même loi.
b) On suppose X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que X et $Y + 1 - X$ sont indépendantes.

1166. ***a)*** On munit l'ensemble des fonctions $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n-1]\!]$ de la loi uniforme. Déterminer la probabilité pour que f soit surjective.
b) Même question avec $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n-2]\!]$.

1167. Soient U une variable aléatoire discrète, n et ℓ deux entiers naturels tels que $n \geqslant \ell + 3$ et $\mathbf{P}(U > n)\,\mathbf{P}(U > \ell) > 0$. On pose $Y = \left\lfloor \frac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \frac{U+1}{2} \right\rfloor$.
a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
b) On suppose que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geqslant 4$ pair. Montrer que Y ne suit pas une loi binomiale.

1168. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $|Z| + 1 \sim \mathcal{G}(p)$ et telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(Z = -n)$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & Z & Z \\ Z & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer la loi du rang de A.
b) Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable.

1169. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q respectivement. En notant $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, donner la probabilité pour M soit diagonalisable.

1170. Soit $M = (X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice aléatoire réelle où les $(1 + X_{i,j})$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.
a) Déterminer la probabilité que M soit symétrique.
b) Déterminer la probabilité que M soit orthogonale.

1171. Soit a un réel. On pose $g : t \mapsto \dfrac{a\,e^t}{2-t}$.
a) Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g soit la fonction génératrice.
On suppose maintenant que a est égal à cette valeur et que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g est la fonction génératrice.
b) Trouver la probabilité que X soit pair.
c) Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ -X & -X & 0 \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

1172. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $X \leqslant Y$, que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = i) > 0, \forall 1 \leqslant k \leqslant i, \mathbf{P}(X = k|Y = i) = \dfrac{1}{i}$. Montrer que X et $Y - X + 1$ ont la même loi.

1173. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $M = (X_i X_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$.
a) Déterminer la loi du rang de M, de la trace de M.
b) Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?

1174. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n$, $\mathbf{P}(T > n) > 0$. Pour tout entier naturel n, on pose $\theta_n = \mathbf{P}(T = n \,|\, T \geqslant n)$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0, 1[$.
b) Exprimer θ_n en fonction de $\mathbf{P}(T \geqslant n)$. En déduire que $\sum \theta_n$ diverge.

1175. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1]$.
a) Soit U une variable aléatoire telle que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la fonction génératrice de U.
b) Soient Y et Z deux variables aléatoires dicrètes indépendantes telles que $U = Y + Z$ et $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que Y et Z suivent des lois binomiales (pas nécessairement de mêmes paramètres).

1176. ***a)*** Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1\,;1\,[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=r-1}^{+\infty} \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$.
b) Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Soit X le rang du r-ème succès. Quelle est la loi de X ? Déterminer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X(X + 1))$ et $\mathbf{V}(X)$.

1177. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.
b) Montrer que $\mathbf{P}\left(X \leqslant \dfrac{\lambda}{3}\right) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

1178. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs strictement positives indépendantes et suivant la même loi. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1$.

1179. ***a)*** Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
b) Si $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ est un variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on définit le *taux de défaillance* de X pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \mathbb{P}(X = n|X \geqslant n)$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.
d) En déduire $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k pour $n \in \mathbb{N}^*$.
e) Quelle variable aléatoire admet un taux de défaillance constant à partir du rang 1 ?
f) Calculer le taux de défaillance de la variable Y introduite à la première question.

1180. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ tel que la série $\sum p_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X_k$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $(S \geqslant k)$ à l'aide des événements $(S_n \geqslant k)$. En déduire que S est une variable aléatoire.

b) Montrer que S est presque-sûrement finie.

c) Montrer que S admet une espérance et la calculer.

1181. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre p.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

a) Montrer que $\mathbf{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 1 - (1-q^k)^n$ où $q = 1 - p$.

b) Soit $f_n : t \mapsto 1 - (1-q^t)^n$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

c) En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(M_n)$ lorsque $n \to +\infty$.