

I. MATRICES SEMI-SIMPLES

1 Commençons par calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

à l'aide du polynôme caractéristique. Pour les matrices de taille 2×2 , nous avons l'expression suivante

$$\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$$

Ici, $\text{Tr}(A) = 4$ et $\det(A) = 4$. Il s'ensuit

$$\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$$

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, on obtient donc $\text{sp}(A) = \{2\}$.

Quitte à se placer dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice A admet deux valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ complexes conjuguées car le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ et à coefficients réels. Pour les matrices de taille 2×2 , les valeurs propres sont les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \det(A) = \lambda \bar{\lambda} = 4 \\ \text{Tr}(A) = \lambda + \bar{\lambda} = 4 \end{cases}$$

Ainsi, $|\lambda| = 2$ et $\text{Re}(\lambda) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = 2$ d'où $\lambda = 2 = \bar{\lambda}$. De cette manière, on retrouve le spectre de A .

La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$. Comme $\text{sp}(A) = \{2\}$, c'est le cas si et seulement si $A - 2I_n = 0$. Comme $A \neq 2I_n$, on en déduit que

La matrice A n'est pas semi-simple.

Une autre méthode pour conclure est de supposer par l'absurde que A est diagonalisable. Comme la seule valeur propre de A est 2, il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = P(2I_2)P^{-1} = 2I_2$$

car I_2 et P commutent.

2 Commençons par calculer le polynôme caractéristique de B :

$$\chi_B = X^2 - \text{Tr}(B)X + \det(B) = X^2 - 4X + 13$$

Le discriminant du polynôme χ_B est $\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 < 0$. Les valeurs propres de B sont les racines du polynôme caractéristique, soit

$$\lambda = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i \quad \text{et} \quad \mu = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

Par conséquent, χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, on en déduit que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit

La matrice B est semi-simple.

Déterminons à présent un vecteur propre pour B associé à la valeur propre λ . Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un tel vecteur propre, on a le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ -5x + y = \lambda y \end{cases} &\iff \begin{cases} (1 - 3i)x = -2y \\ -5x = (3i + 1)y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{-1 + 3i}{2}x = y \\ \frac{-5}{3i + 1}x = y \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ -5x + y = \lambda y \end{cases} &\iff \frac{-1 + 3i}{2}x = y \end{aligned}$$

Un vecteur propre associé à la valeur propre est alors donné par $V = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1 + 3i)/2 \end{pmatrix}$. Posons $W_1 = \operatorname{Re}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. La famille (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ car libre et de cardinal 2. Calculons

$$\begin{aligned} BW_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11/2 \end{pmatrix} = 2W_1 - 3W_2 \\ \text{et} \quad BW_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3W_1 + 2W_2 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice représentant l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base (W_1, W_2) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant Q la matrice inversible de passage de la base canonique à la base (W_1, W_2) , on a bien

$$B = Q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

3 Cette question généralise le résultat de la question précédente aux matrices de taille 2×2 semi-simples à valeurs propres complexes non réelles conjuguées.

Montrons dans un premier temps que M est semi-simple. Par hypothèse, M admet deux valeurs propres complexes distinctes. Il s'ensuit que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ce qui revient à dire que

La matrice M est semi-simple.

Soit V un vecteur propre de B associé à la valeur propre μ . Reproduisons le raisonnement de la question précédente et considérons $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$, de sorte que $V = W_1 + iW_2$. On a alors $BV = \mu V$. D'où

$$B(W_1 + iW_2) = (a + ib)(W_1 + iW_2)$$

donc $BW_1 + iBW_2 = (aW_1 - bW_2) + i(bW_1 + aW_2)$

Or, $(W_1, W_2) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où $BW_1 \in \mathbb{R}^2$ et $BW_2 \in \mathbb{R}^2$. On peut ensuite identifier les parties réelle et imaginaire dans l'égalité précédente pour obtenir

$$\begin{cases} BW_1 = aW_1 - bW_2 \\ BW_2 = bW_1 + aW_2 \end{cases} \quad (1)$$

Montrons que (W_1, W_2) est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. La famille $(V, \bar{V})$ est une base de vecteurs propres du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^2$. En effet, $\bar{V}$ est un vecteur propre de B pour la valeur propre $\bar{\mu} \neq \mu$ car

$$B\bar{V} = \bar{B}V = \bar{\mu}\bar{V} = \bar{\mu} \cdot \bar{V}$$

Montrons que (W_1, W_2) est une famille $\mathbb{R}$ -libre. Soient a_1 et a_2 deux réels. On a

$$\begin{aligned} a_1W_1 + a_2W_2 = 0 &\iff (a_1W_1 + ia_1W_2 - ia_2W_1 + a_2W_2) \\ &\quad + (a_1W_1 - ia_1W_2 + ia_2W_1 + a_2W_2) = 0 \\ &\iff (a_1 - ia_2)(W_1 + iW_2) + (a_1 + ia_2)(W_1 - iW_2) = 0 \\ &\iff (a_1 - ia_2)V + (a_1 + ia_2)\bar{V} = 0 \\ &\iff a_1 = ia_2 \\ a_1W_1 + a_2W_2 = 0 &\iff a_1 = a_2 = 0 \end{aligned}$$

puisque $(V, \bar{V})$ sont $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants et que a_1, a_2 sont réels. On a prouvé que (W_1, W_2) est une famille libre du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, c'est donc une base de cet espace. Considérons alors l'endomorphisme u_B canoniquement associé à B . D'après (1), la matrice représentant u_B dans la base (W_1, W_2) est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

En notant Q la matrice de passage de la base canonique à la base (W_1, W_2) , d'après la formule de changement de base pour les matrices, il vient

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}$$

La matrice M est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Donnons une autre preuve de ce résultat. Posons

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Commençons par calculer le polynôme caractéristique de N :

$$\chi_N = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ b & X - a \end{vmatrix} = (X - a)^2 + b^2 = (X - a + ib)(X - a - ib)$$

Comme $b \neq 0$, on en déduit que N est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$. Il existe alors une matrice de passage $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$N = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Les valeurs propres de B sont également μ et $\bar{\mu}$, il existe de même une matrice de passage $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$B = Q \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

On obtient alors $Q^{-1}BQ = P^{-1}NP$, puis $B = QP^{-1}NPQ^{-1}$. En posant la matrice $R = PQ^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on remarque que R est inversible (car P et Q le sont) et $B = R^{-1}NR$ est alors semblable à N sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Un exercice classique est alors de montrer que la similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ implique celle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donnons une démonstration de ce résultat. Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = P^{-1}BP$. On décompose $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la relation de similitude donne alors

$$QA + iRA = BQ + iBR$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on a $QA = BQ$ et $RA = BR$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(Q + tR)A = B(Q + tR)$$

Il suffit alors de prouver qu'il existe un réel t tel que $Q + tR$ est inversible pour conclure. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \det(Q + tR)$. L'application ϕ est polynomiale, avec $\phi(i) \neq 0$, il en découle que ϕ est non nulle. Or, ϕ admet un nombre fini de racines, et il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t) \neq 0$. Pour cette valeur de t , la matrice $Q + tR$ est inversible et fournit la matrice de passage souhaitée.

4 Raisonnons par double implication. Supposons que M est semi-simple. Par définition, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ainsi

$$P = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)$$

est un polynôme annulateur unitaire de M à racines simples, qui divise le polynôme caractéristique de M . Son degré est donc égal à 1 ou 2. Distinguons ces deux cas.

- Si $\deg(P) = 1$, alors M est diagonale et sa seule valeur propre est nécessairement réelle car $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Cela permet de conclure que M est diagonale donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Si $\deg(P) = 2$, alors $P = \chi_M$. Notons Δ le discriminant de χ_M . Si $\Delta = 0$, alors le polynôme χ_M aurait une racine double, ce qui est absurde car χ_M est scindé à racines simples par hypothèse. Il reste donc deux cas à traiter :
 - Si $\Delta > 0$, alors $\chi_M = P$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Si $\Delta < 0$, alors M possède deux valeurs propres complexes distinctes donc conjuguées, de parties imaginaires non nulles. Ainsi, la deuxième condition est bien réalisée.

Ceci prouve l'implication directe. Montrons l'implication réciproque. Si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elle est en particulier diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si M vérifie la seconde condition, alors M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, car le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. En conclusion,

La matrice M est semi-simple si et seulement si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou χ_M admet deux racines complexes non réelles conjuguées.

5 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à une matrice presque diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice M presque diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et telles que

$$N = PMP^{-1}$$

Il existe alors une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et des réels $(a_1, b_1, \dots, a_q, b_q) \in \mathbb{R}^{2q}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & M(a_2, b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. D'après le résultat de la question 3, la matrice $M(a, b)$ est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a + ib$ et $a - ib$. Ainsi, il existe $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$M(a, b) = Q \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les coefficients diagonaux de D , et $\mu_i = a_i + ib_i$ pour $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$. Il existe une famille de matrices de passage $(Q_i)_{i \in \llbracket 1; q \rrbracket} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^q$ inversibles telle que pour tout $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$

$$M(a_i, b_i) = Q_i \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_i \end{pmatrix} Q_i^{-1}$$

Notons la matrice suivante $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & K \end{array} \right)$

où $K = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_q \end{pmatrix}$

La matrice Q est alors inversible car c'est une matrice diagonale par blocs avec des blocs inversibles par hypothèse. Son inverse est

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_q^{-1} \end{pmatrix}$$

De plus, on obtient par un calcul par blocs que

$$QM^{-1} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q)$$

De cette manière, on a prouvé que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale. Il en est de même pour la matrice $N = PMP^{-1}$, qui est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent,

Si N est une matrice semblable à une matrice presque diagonale, alors elle est semi-simple.

Donnons une autre preuve de ce résultat. Considérons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice presque diagonale, et l'endomorphisme u_M canoniquement associé à M . Montrons qu'il existe une base dans laquelle la matrice associée à u_M est diagonale. Pour cela, étudions u_M sur chacun de ses espaces propres. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il y a deux cas à considérer.

- Si $k \leq p$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_k) = \lambda_k e_k$. Donc e_k est un vecteur propre de u_M .
- Si $k \geq p+1$, il existe $r \in \llbracket 1; q \rrbracket$ tel que $k = p+2r$ ou $k = p+2r-1$. Il existe alors $(a_r, b_r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(e_{p+2r-1}) = a_r e_{p+2r-1} - b_r e_{p+2r}$ et $u(e_{p+2r}) = b_r e_{p+2r-1} + a_r e_{p+2r}$. Il en découle que

$$u(\text{Vect}(e_{p+2r-1}, e_{p+2r})) \subset \text{Vect}(e_{p+2r-1}, e_{p+2r})$$

Ainsi, on peut considérer l'endomorphisme $\tilde{u}_M$ induit par u_M sur $\text{Vect}(e_{p+2r-1}, e_{p+2r})$. Comme $(X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j)$ annule $\tilde{u}_M$, alors $\tilde{u}_M$ admet une base de vecteurs propres dans $\text{Vect}(e_{p+2r-1}, e_{p+2r})$, qu'on notera (v_r, w_r) .

En remarquant que $\text{Vect}(v_i, w_i) = \text{Vect}(e_{p+2i-1}, e_{p+2i})$ pour tout $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$, on en déduit que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p, v_1, w_1, \dots, v_q, w_q) = \mathbb{C}^n$. De plus, la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p, v_1, w_1, \dots, v_q, w_q)$ est formée uniquement de vecteurs propres, donc la matrice représentant l'endomorphisme u_M dans cette base est diagonale. Ainsi, la famille $(e_1, \dots, e_p, v_1, w_1, \dots, v_q, w_q)$ est une base diagonalisante de u_M , ce qui permet de conclure.

Une autre solution plus laborieuse est de calculer le polynôme caractéristique de M en utilisant des calculs par blocs puis d'exhiber un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou de remarquer que la multiplicité des valeurs propres est égale à la dimension des espaces propres.

6 Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines réelles de χ_N , et $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q$ ses racines complexes non réelles conjuguées répétées selon leurs ordres de multiplicité. On aura

$$\chi_N = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \prod_{j=1}^q (X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j)$$

Supposons que N soit semi-simple. Notons respectivement u et $\tilde{u}$ l'endomorphisme canoniquement associé à N vu comme une application $\mathbb{C}$ -linéaire et comme une application $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{R}^n$. Les espaces propres de u sont alors en somme directe et

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^n}) = \mathbb{C}^n$$

- Si λ désigne une valeur propre réelle de N , on a

$$\text{rg}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^n}) = \text{rg}(N - \lambda I_n) = \text{rg}(\tilde{u} - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})$$

donc $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^n})$ et $\text{Ker}(\tilde{u} - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})$ ont la même dimension d'après le théorème du rang. Donc il existe $(U_1, \dots, U_d) \in (\mathbb{R}^n)^d$ une base de $\text{Ker}(\tilde{u} - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})$. Or, une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est aussi une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Donc $(U_1, \dots, U_d)$ est une base de $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{C}^n})$.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non réelle de N , $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^n})$ admet une base de vecteurs propres $(U_1, \dots, U_d)$ et pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, $\bar{U}_i$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$.

Considérons maintenant $(V_1, \dots, V_p)$ une base des espaces propres associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et $(Z_1, \bar{Z}_1, \dots, Z_q, \bar{Z}_q)$ une base des espaces propres associés aux valeurs propres non réelles $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q$. La famille

$$(V_1, \dots, V_p, Z_1, \bar{Z}_1, \dots, Z_q, \bar{Z}_q)$$

est une base de vecteurs propres du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. Posons pour tout $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$

$$X_i = \operatorname{Re}(Z_i) \quad \text{et} \quad Y_i = \operatorname{Im}(Z_i)$$

Montrons que la famille

$$\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_p, X_1, Y_1, \dots, X_q, Y_q)$$

est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Soit $(a_1, \dots, a_p, b_1, c_1, \dots, b_q, c_q) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{j=1}^p a_j V_j + \sum_{k=1}^q b_k X_k + \sum_{k=1}^q c_k Y_k = 0$$

On obtient alors

$$\sum_{j=1}^p 2a_j V_j + \sum_{k=1}^q (b_k X_k + ib_k Y_k - ic_k X_k + c_k Y_k) + \sum_{k=1}^q (b_k X_k - ib_k Y_k + ic_k X_k + c_k Y_k) = 0$$

$$\text{puis} \quad \sum_{j=1}^p 2a_j V_j + \sum_{k=1}^q (b_k - ic_k)(X_k + iY_k) + \sum_{k=1}^q (b_k + ic_k)(X_k - iY_k) = 0$$

$$\text{soit} \quad \sum_{j=1}^p 2a_j V_j + \sum_{k=1}^q (b_k - ic_k)Z_k + \sum_{k=1}^q (b_k + ic_k)\bar{Z}_k = 0$$

Comme $(V_1, \dots, V_p, Z_1, \bar{Z}_1, \dots, Z_q, \bar{Z}_q)$ est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, et que les familles $(b_k)_{k \in \llbracket 1; q \rrbracket}$ et $(c_k)_{k \in \llbracket 1; q \rrbracket}$ sont composées de réels, on en déduit que

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad a_j = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket \quad b_k = c_k = 0$$

De cette façon, $\mathcal{B}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Elle est de plus de cardinal n , égal à la dimension de cet espace. C'est donc une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$, nous avons notamment les relations suivantes

$$u(X_i) = a_i X_i - b_i Y_i \quad \text{et} \quad u(Y_i) = b_i X_i + a_i Y_i$$

La matrice M qui représente u dans la base $\mathcal{B}$ est alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & M(a_1, b_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

qui est une matrice presque diagonale. En conclusion,

Toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale.

Nous pouvons donner une preuve plus rapide de ce résultat en utilisant la remarque de la question 3. En effet, une matrice semi-simple est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice presque diagonale car toutes les deux sont semblables à une même matrice diagonale. D'après la remarque de la question 3, si deux matrices sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont également semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, si M est semi-simple, elle est semblable à une matrice presque diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De manière générale, la $\mathbb{R}$ -indépendance d'une famille de vecteurs n'entraîne pas sa $\mathbb{C}$ -indépendance. Ici, on peut en fait identifier les parties réelle et imaginaire des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ pour se ramener au cas d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

II. UNE CARACTÉRISATION DES MATRICES DIAGONALISABLES DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

7 Posons $J = \{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid v_k \in F\}$. Si $\text{Card}(J) = n$, alors le sous-espace vectoriel F contient une base de E , donc $F = E$ ce qui est exclu. Il en découle que $\text{Card}(J) < n$.

Il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$.

Soit $x \in F \cap \text{Vect}(v_k)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda v_k$. Supposons que $\lambda \neq 0$, alors $v_k = x/\lambda \in F$, ce qui est absurde, donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$. Ce qui prouve que

$$F \cap \text{Vect}(v_k) \subset \{0_E\}$$

De plus, comme

$$\{0_E\} \subset \text{Vect}(v_k) \cap F$$

on a

$$F \cap \text{Vect}(v_k) = \{0_E\}$$

Ce qui est équivalent à ce que F et $\text{Vect}(v_k)$ soient en somme directe.

Le sous-espace vectoriel F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

8 Notons v_k un vecteur propre qui n'appartient pas à F , qui existe par la question 7. Commençons par montrer que $\text{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$. La droite vectorielle engendrée par un vecteur propre étant stable, on a $u(\text{Vect}(v_k)) \subset \text{Vect}(v_k)$. D'après la question 7,

$$F \cap \text{Vect}(v_k) = \{0_E\}$$

d'où $\text{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{L}$ est non vide car $\text{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$ est de dimension 1 et donc $1 \in \mathcal{L}$. De plus, $\mathcal{L}$ est majoré par la dimension de l'espace E qui est n . Ainsi, $\mathcal{L}$ est un ensemble d'entiers non vide et majoré, il admet donc un plus grand élément que l'on notera r . De cette manière,

Il existe un plus grand élément noté r dans $\mathcal{L}$.

9 Soit $H \in \mathcal{A}$ un espace de dimension maximale, c'est-à-dire égale à r . Par définition de l'ensemble $\mathcal{A}$, $u(H) \subset H$. Il en découle que H est stable par u . De plus, $F \cap H = \{0_E\}$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que $F \oplus H = E$.

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Comme $F + H \neq E$ et $F + H \neq \{0_E\}$, on en déduit d'après la question 7 qu'il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$v_k \notin F + H \quad \text{et} \quad \text{Vect}(v_k) \cap (F + H) = \{0_E\}$$

En particulier, H et $\text{Vect}(v_k)$ sont en somme directe. Considérons $H' = H \oplus \text{Vect}(v_k)$, alors H' est en somme directe avec F et $u(H') \subset H'$ comme somme d'espaces stables par u . Cependant, $\dim(H') = \dim(H) + 1$, ce qui est absurde par maximalité de la dimension de H . On en déduit que $F \oplus H = E$, c'est-à-dire que H est un supplémentaire de F stable par u .

Le sous-espace vectoriel F admet un supplémentaire dans E , stable par u .

10 Supposons par l'absurde que u n'est pas diagonalisable. Alors

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq E$$

sinon u serait diagonalisable. Donc, il existe un espace vectoriel F de dimension $n - 1$ qui contient la somme des sous-espaces propres de u . En effet, la somme des sous-espaces propres est de dimension $d \leq n - 1$, alors on peut compléter cet espace en un espace de dimension $n - 1$, c'est-à-dire en un hyperplan. D'après le résultat de la question 9, F possède un supplémentaire dans E stable par u . Ce supplémentaire est une droite, il est donc engendré par un vecteur $w \neq 0$. Comme $u(w) \in \text{Vect}(w)$, il existe un scalaire λ tel que $u(w) = \lambda w$. Par conséquent, $\text{Vect}(w)$ est inclus dans un espace propre, donc

$$\text{Vect}(w) \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \subset F \quad \text{et} \quad F \cap \text{Vect}(w) = \{0_E\}$$

Il en résulte que $w = 0$, ce qui est absurde. Finalement,

Si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par u , alors u est diagonalisable.

D'après la question 9, on en déduit que si u est diagonalisable, alors tout sous-espace vectoriel F différent de $\{0_E\}$ et de E admet un supplémentaire stable par u . C'est encore le cas si $F = \{0_E\}$ ou si $F = E$, respectivement des supplémentaires de E et $\{0_E\}$. Il en découle la caractérisation suivante :

Une matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M .