Suites de fonctions

1 (∗∗)

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

(a). Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque. Montrer que $(f_n \circ \phi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \circ \phi$.

(b). La suite $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle nécessairement uniformément vers $\phi \circ f$?

(c). Même question en supposant ϕ continue ? lipschitzienne ?

2 (∗)

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(1) = 0$. On pose $g_n : x \longmapsto x^n f(x)$ pour tout entier n. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

3 (∗)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur un segment $[a;b]$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[a;b]$ convergeant vers $x \in [a;b]$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
Donner un contre-exemple si la convergence n'est pas uniforme.

4 (∗∗∗) **PC CCP 2003**

On définit la suite de fonctions $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par morceaux en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[, \qquad \chi_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + x - \frac{k}{n}\right)$$

(a). Montrer que χ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout entier n et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx-1} \leq \chi_n(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx+1}$$

(b). En déduire que $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction exponentielle.

(c). Montrer que $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

(d). Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n - \chi_n(n)$. En déduire que $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

5 (∗∗) **PC CCP 2003**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}(x) = \sin u_n(x)$$

Etudier les différents modes de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6 (∗∗) **MP TPE 2001**

On définit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\qquad P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X - {P_n}^2\right)$

(a). Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right]$$

Etablir une formule similaire pour $P_{n+1}(x) + \sqrt{x}$.

(b). En déduire que pour tout $x \in [0;1]$ et tout entier n

$$\sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$$

puis la convergence simple de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0;1]$.

(c). En étudiant le sens de variation de $x \longmapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et celui de $x \longmapsto P_n(x) + \sqrt{x}$ sur $[0;1]$, déterminer $\left|\left|P_n - \sqrt{\cdot}\right|\right|_{\infty,[0;1]}$.

(d). En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.

7 (∗∗) **TPE MP 2001**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$, convergeant simplement sur $[a;b]$ vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange en $(m+1)$ points distincts de $[a;b]$, montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus m et que la convergence est uniforme.

Séries de fonctions

8 —— $(*)$ ——

Etudier suivant l'intervalle de définition les différents types de convergence des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x}$$

Déterminer ensuite leurs limites en 0^+.

9 —— $(**)$ ——

Soit $\alpha > 0$. On note $I =]-\alpha;\alpha[$ et on considère $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lambda \in]0;1[$. Déterminer les fonctions φ continues sur I et telles que

$$\forall x \in I, \qquad \varphi(x) - \varphi(\lambda x) = f(x) \qquad (\star)$$

10 —— $(**)$ ——

Soit f définie par
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\operatorname{ch}(nx)}$$

Préciser le domaine de définition de f, etudier la continuité de f et donner enfin la limite en $+\infty$ de cette fonction.

11 —— $(*)$ ——

Pour tout réel x, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$$

Etudier le domaine de définition, la continuité et enfin la limite en $+\infty$ de f.

12 —— $(**)$ —— **PC X 2009**

Soit
$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est lipschitzienne.

(c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

13 —— $(**)$ —— **PC Mines 2009**

Soit
$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f et la continuité de f sur ce domaine.

(b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

14 —— $(*)$ —— **PC Mines 2016**

Soit
$$f : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$$

(a). Donner le domaine de définition D de f. Monter que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

(b). Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(c). Déterminer un équivalent lorsque t tend vers 0^+ de $f(t)$.

15 —— $(**)$ —— **PC Centrale 2009**

Soit
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+\sqrt{n}}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

16 (∗∗∗) **PC X 2011**

Etudier $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(1+n^2)(1+\ln n)}$.

17 (∗∗∗) **MP Mines 2011**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que

$$h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^n}{1-x^n}$ lorsque x tend vers 1^-.

18 (∗∗) **PC Mines 2011**

Soit
$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est elle continue sur ce domaine ? de classe $\mathcal{C}^1$?

(b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

Indications

1 (b) Utiliser $\phi : x \longmapsto x^2$ pour le contre-exemple.

(c) La continuité ne suffit pas (même contre-exemple qu'au (b)). Lorsque ϕ est lipschitzienne, re-démontrer directement la définition de la convergence uniforme.

2 Raisonner avec des ϵ en commençant par majorer g_n indépendamment de n au voisinage de 1.

3 Utiliser les deux définitions (convergence de suite, convergence uniforme de suite de fonctions) dans le bon ordre ! Pour le contre-exemple, on pourra utiliser $f_n : x \longmapsto x^n$ sur $[0;1]$.

4 (a) Pour x arbitraire dans $\mathbb{R}_+$, introduire l'unique entier k tel que $x \in [k/n;(k+1)/n[$ et utiliser la croissance de $t \longmapsto \alpha^t$ lorsque $\alpha > 1$.

(b) Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ à x fixé du majorant et du minorant de l'encadrement précédent.

(c) En prenant cette fois x arbitraire dans un segment $[a;b]$, majorer $e^x - \chi_n(x)$ par une quantité indépendante de x (mais éventuellement de a et b).

5 On pourra remarquer qu'à partir du rang 2, la fonction u_n est à valeur dans $[-1;1]$ et utiliser les propriétés de sin sur cet intervalle.

6 (b) Pour l'encadrement, procéder par récurrence sur n. Pour la convergence simple, fixer $x \in \mathbb{R}_+$ et considérer les propriétés de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Montrer par récurrence sur n que les deux fonctions sont monotones de sens contraire. En déduire que $|P_n - \sqrt{\cdot}|$ atteint son maximum en 0.

7 Fixer $x_0 < \cdots < x_m$ arbitraires puis introduire la famille $(L_i)_{i\in[\![0;m]\!]}$ où

$$\forall i \in [\![0;m]\!]\,, \qquad L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Justifier que $P_n = \sum_{i=0}^{m} P_n(x_i)\, L_i$ pour dans un premier temps exprimer f en fonction des L_i, puis majorer $||P_n - f||_\infty$.

8 Pour la limite en 0 de $\sum_{n=0}^{N} e^{-n^2 x}$, remarquer que pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-n^2 x}$$

9 Procéder par analyse-synthèse et, dans l'analyse, déterminer une éventuelle solution sous forme d'une série de fonctions.

10 Pour la continuité , on pourra vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{\sin(x^2)}{\mathrm{ch}(nx)}\right| \leq 2x^2 e^{-n|x|}$$

Pour la limite, comparer $f(x)$ à $\sin(x^2)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(xt)}$ par une comparaison série-intégrale, puis déterminer la limite de l'intégrale quand x tend vers $+\infty$.

11 Poser $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}} - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et étudier la série $\sum u_n$. On peut aussi s'intéresser au caractère $\mathcal{C}^1$ de f.

Pour la limite en $+\infty$, encadrer $f(x)$ à l'aide du théorème des séries alternées.

12 (b) On peut montrer que f est $\mathcal{C}^1$ de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, ou montrer que $f_n : x \longmapsto x/(x^2+n^2)$ est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz bien choisie.

(c) Utiliser une technique d'interversion limite/somme pour trouver la limite de $f(x)/x$ en $+\infty$.

13 (b) On pourra utiliser l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n} = -\ln(1-u)$ pour tout $u \in \left]0;1\right[$ et majorer la quantité $f(x) + \ln(1-e^{-x})$.

14 Fixer $t > 0$ puis effectuer une comparaison série-intégrale à l'aide de la fonction $x \longmapsto e^{-t\sqrt{x}}$.

15 (a) Justifier la convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions et de ses dérivées.

(b) Déterminer d'abord un équivalent de $x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}/\sqrt{n}$ (à l'aide d'une comparaison série-intégrale). On pourra utiliser l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

16 Justifier la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions. Pour le caractère $\mathcal{C}^1$ de f, utiliser une transformée d'Abel pour obtenir une nouvelle expression de f, à laquelle on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

17 Pour l'équivalent, appliquer ce qui précède avec $f : t \longmapsto te^{-t}/(1-e^{-t})$. On pensera à vérifier que les conditions requises sont vérifiées. En attendant le prochain chapitre, on pourra admettre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

18 (a) Justifier la convergence normale de la série de fonctions et de la série des dérivées sur tout segment de $\left]-1;1\right[$.

(b) Fixer $x \in \left]0;1\right[$ puis utiliser une comparaison série-intégrale avec une fonction bien choisie.