

Dénombrément, dénombrabilité

1 _____ (*) _____ **X PC 2014**

Déterminer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ de 1000000.

2 _____ (**) _____

Soient n et m deux entiers. Déterminer successivement :

- (a). le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m \rrbracket$
- (b). le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m \rrbracket$
- (c). le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq m$
- (d). le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq m$
- (e). le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n = m$
- (f). le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n = m$

3 _____ (**) _____

- (a). Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
- (b). Montrer que l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

4 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante. Montrer que l'ensemble des réels en lequel f n'est pas continue est au plus dénombrable.

5 _____ (***) _____

Soit E et F deux ensembles. On suppose que E (resp. F) est de cardinal inférieur ou égal à celui de F (resp. E), c'est à dire qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E . On veut prouver que E et F ont même cardinal, c'est-à-dire qu'il existe alors une bijection de E dans F (**théorème de Cantor-Bernstein**).

Lorsqu'un élément $y \in F$ a un antécédent par f , alors cet antécédent est unique puisque f est injective. On le note alors $f^{-1}(y)$. De même, un antécédent de $x \in E$ par g s'il existe est noté $f^{-1}(x)$. On considère pour chaque $x \in E$ la suite

$$(x, \quad g^{-1}(x), \quad f^{-1}(g^{-1}(x)), \quad g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))), \quad \text{etc} \dots)$$

Cette suite peut être finie ou infinie (elle s'arrête lorsque l'on tombe sur un élément qui n'a pas d'antécédent par f ou g). Son dernier élément peut être dans E ou dans F . Soit maintenant A le sous ensemble de E des éléments pour lesquels la suite est finie et dont le dernier élément est dans E .

- (a). Montrer que si $x \notin A$, alors $g^{-1}(x)$ existe.
- (b). Montrer que la fonction $h : E \rightarrow F$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection de E dans F .

Espaces probabilisés

6 _____ (*) _____

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

- (a) Soient A et B deux évènements indépendants avec $A \subset B$. Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$.
- (b) Soit A un évènement indépendant de lui-même. Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
- (c) Montrer que si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$, alors A est indépendant de tout évènement. Etudier la réciproque.

7 _____ (*) _____

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisable. $(\Omega, \mathcal{T})$. On définit la limite inférieure B et la limite supérieure C de la suite par

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

- (a). Décrire B et C en langage probabiliste.

(b). Montrer que ce sont des évènements et que B est inclus dans C .

8 _____ (**) _____

Soit Ω un ensemble infini et non dénombrable.

(a). On note $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ ou } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable}\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .

(b). On note $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini}\}$. Montrer que $\mathcal{U}$ n'est pas une tribu sur Ω .

(c). Montrer que la fonction $P : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$$

définit une probabilité sur $\mathcal{T}$. On justifiera que P est bien définie.

9 _____ (*) _____

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements presque sûrs d'un espace probabilisé. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sont presque sûrs.

10 _____ (**) _____

Pour tout $a > 1$, on note
$$\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

On munit $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ d'une probabilité (appelée **loi de Zipf**) en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a) \cdot n^a}$$

(a). Pour tout entier $m \geq 1$, on note $m\mathbb{N}^* = \{mk, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P(m\mathbb{N}^*)$.

(b). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers p et q pour que $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ soit indépendants.

(c). (**Application**) On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5$, etc) puis C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des entiers $p_0, \dots, p_n$.

(i) Calculer la probabilité $P(C_n)$.

(ii) Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

(iii) En déduire le développement eulérien de la fonction ζ :

$$\zeta(a) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(p_n)^a}\right)^{-1}$$

11 _____ (**) _____

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et P une fonction de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (A, B) \in \mathcal{T}, \quad A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

On suppose également que P vérifie la propriété de continuité croissante. Montrer que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

12 _____ (**) _____

(a). (**Lemme préliminaire**) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0; 1[$. Justifier l'implication

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ diverge} \implies \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a_n) = 0$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On note

$$\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

(b). Vérifier que si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge, alors $P(\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0$.

(c). En déduire le **lemme de Borel-Cantelli** : la probabilité qu'une infinité des (A_n) se produise simultanément est nulle.

- (d). Démontrer que si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ diverge, et si les évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, alors

$$P(\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 1$$

13 _____ (**) _____

On lance un dé traditionnel de manière répétée.

- (a). Soit A et B deux sous-ensembles de $\llbracket 1; 6 \rrbracket$. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat appartenant à A avant d'obtenir un résultat dans B ?
- (b). On peut arrêter les lancers quand on le souhaite. Toutefois, si le dé donne 1, on est obligé de s'arrêter. Pour maximiser le score, on choisit un entier $n \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et on décide de s'arrêter dès que le lancer est supérieur ou égal à n . Quelle est la valeur de n qui maximise l'espérance du score ?

14 _____ (**) _____

Une petite taupe entre dans son terrier par l'entrée A . A chaque intersection, elle a une chance sur deux de prendre à gauche, et une chance sur deux de prendre à droite. Quelle est la probabilité qu'elle sorte en B ?



15 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

- (a). Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $P(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (b). Soit (E, τ, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements incompatibles. Montrer que $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

16 _____ (**) _____ **Mines PC 2016**

Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?

17 _____ (**) _____ **Centrale PC 2016**

On lance deux pièces équilibrées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement « les deux pièces ont donné le même nombre de pile et de face dans les n premiers lancers ».

- (a). Déterminer $P(E_n)$.
- (b). Sur les n premiers lancers, combien de fois cet évènement est-il réalisé en moyenne ?

18 _____ (*) _____ **X PC 2016**

Une urne contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. Une boule est enlevée de l'urne au hasard. Anatole tire 6 fois une boule avec remise et obtient 6 fois une boule rouge. Barnabé tire 600 fois une boule avec remise et obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte. Lequel des deux peut s'attendre le plus à ce qu'une boule verte ait été enlevée ?

19 _____ (**) _____ **X PC 2016**

On dispose de deux dés équilibrés, un bleu et un rouge. On note A l'évènement « la somme des deux dés est égale à 9 ». Trouver deux évènements B et C relatifs au dé rouge tels que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in \{A, B, C\}, \quad P(X \cap Y) \neq P(X)P(Y)$$

20 _____ (**) _____ **X PC 2016**

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

21 _____ (***) _____ **X PC 2016**

Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B . Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

Indications

- 1** Décomposer 1000000 en facteurs premiers.
- 2** (a) Pour construire une telle fonction, il suffit de choisir une partie à n éléments de $\llbracket 1; m \rrbracket$.
 (b) Utiliser une bijection entre les fonctions croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m \rrbracket$ et les fonctions strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m + n - 1 \rrbracket$.
 (c) Utiliser une bijection entre les solutions de l'inéquation et les fonctions strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m \rrbracket$.
 (e). Utiliser le (c).
- 3** (a) Ecrire l'ensemble comme réunion dénombrable d'ensembles finis.
 (b) En utilisant la non-dénombrabilité de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, construire un sous-ensemble de $\sigma(\mathbb{N})$ non dénombrable.
- 4** Utiliser la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$, et associer à chaque point de discontinuité de f un rationnel.
- 5** (b). Justifier l'injectivité en considérant l'égalité $h(x) = h(y)$ et en distinguant les cas $(x, y) \in A^2$, puis $(x, y) \in \overline{A}^2$ et enfin $(x, y) \in A \times \overline{A}$.
- 6** (c) Lorsque A est négligeable et X quelconque, utiliser le fait que $A \cap X \subset A$. Lorsque A est certain, utiliser son complémentaire. Pour la réciproque, on pourra utiliser la question (b).
- 7** (a) Considérer $\omega \in \Omega$ et traduire à l'aide de quantificateurs les propriétés « $\omega \in B$ » et « $\omega \in C$ ».
- 8** (a) Pour la stabilité par union dénombrable, distinguer deux cas suivant l'existence ou non d'une partie dont le complémentaire est au plus dénombrable. On rappelle qu'une partie d'un ensemble au plus dénombrable est également au plus dénombrable.
 (b) Commencer par exhiber une suite d'éléments deux à deux distincts de Ω .
 (c) Reasonner de manière similaire au (a).
- 9** Pour montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est presque sûr, considérer son complémentaire.
- 10** (a) Calculer la probabilité des événements en sommant celles de leurs éléments.
 (b) On rappelle qu'un entier m est divisible par deux entiers p et q si et seulement si il est divisible par leur plus petit commun multiple (ppcm).
 (c) Ecrire C_n comme une intersection d'événements mutuellement indépendants.
 (d) Justifier que l'intersection ne contient qu'un seul élément.
 (e) Utiliser la continuité décroissante.
- 11** Etant donné une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on pourra introduire la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$$

- 12** (a) Justifier que $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - a_n)$ est une série à termes négatifs divergente.
 (b) Poser pour tout entier n $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$
 et remarquer qu'il s'agit d'une suite décroissante d'événements.
 (c) Utiliser l'interprétation de l'exercice 7.
 (d) Poser pour tout entier n $C_n = \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}$
 et montrer qu'il s'agit d'une suite croissante d'événements négligeables.
- 13** (a) Déterminer pour $k \in \mathbb{N}^*$ la probabilité de tirer un élément de A au k -ième lancer et aucun élément ni dans A ni dans B sur les lancers précédents.
 (b) Déterminer la probabilité que le jeu s'arrête au k -ième lancer pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
- 14** La principale difficulté consiste à choisir un univers Ω probabilisé judicieux pour modéliser l'expérience aléatoire.
- 15** (a) Considérer l'union dénombrable $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$.
 (b) Généraliser le raisonnement précédent.
- 16** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité que l'on s'arrête en ayant mangé exactement k pommes.
- 18** Utiliser la formule de Bayes.
- 20** Il s'agit de compter les applications de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans lui-même dont l'image est de cardinal $n - 1$. Effectuer un dénombrement de ces applications.