

1 _____ (**) _____

On considère n droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ dans le plan 2 à 2 sécantes, mais 3 à 3 non concourantes. On note a_n le nombre de régions délimitées par ces droites.

- Déterminer a_0, a_1, a_2 et a_3 .
- Déterminer le nombre d'intersections entre $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$.
- Les droites $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$ délimitent a_{n-1} régions du plan. Combien d'entre-elles sont séparées en deux par $\mathcal{D}_n$?
- En déduire l'expression de a_n pour tout entier n .

- On trouve immédiatement avec un dessin les valeurs suivantes :

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 7$$

- Par hypothèse, les droites sont 2 à 2 sécantes donc $\mathcal{D}_n$ intersecte toutes les autres droites au moins une fois. De plus, les droites étant non concourantes, les points d'intersections sont 2 à 2 distincts. Par conséquent,

La droite $\mathcal{D}_n$ intersecte les autres droites en $n - 1$ points distincts.

- D'après le (b), la droite $\mathcal{D}_n$ peut se découper en $n - 2$ demi-droites et deux demi-droites entre ses points d'intersections avec $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$. Chacun de ces segments ou demi-droite découpe une partie parmi les a_{n-1} en 2. Par suite,

La droite $\mathcal{D}_n$ sépare en deux n parties parmi les a_{n-1} délimitées par $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{n-1}$.

- D'après la question précédente, on obtient la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_{n-1} + n$$

On en déduit immédiatement par télescopage ou récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2 _____ (**) _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partie lacunaire de $\llbracket 1; n \rrbracket$ toute partie éventuellement vide de cet ensemble qui ne contient pas deux entiers consécutifs. On note u_n le nombre de telles parties.

- Quelles sont les valeurs de u_1 et u_2 ?
- Démontrer la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Pour tout entier p , on note $v_{n,p}$ le nombre de parties lacunaires de $\llbracket 1; n \rrbracket$ à p éléments.

- Montrer que $v_{n,p}$ est égal au nombre d'éléments de $\{0, 1\}^n$ comportant $n - p$ fois la valeur 0 et jamais deux 1 consécutifs.
- En déduire que $v_{n,p} = \binom{n+1-p}{p}$.

- On obtient immédiatement par définition

$$a_1 = 2 \quad \text{et} \quad a_2 = 3$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sépare l'ensemble des parties lacunaires de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux sous-ensembles disjoints :

- celles qui contiennent l'élément $n+2$: puisqu'elles ne doivent pas contenir $n+1$, il y en a autant que de parties lacunaires de $\llbracket 1; n \rrbracket$, soit u_n .
- celles qui ne contiennent pas $n+2$: il y en a autant que de parties lacunaires de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, soit u_{n+1} .

La réunion étant disjointe, on en déduit aussitôt l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

- (c) Par convention, on pose $u_0 = 1$ de sorte que la relation de récurrence précédente reste valable pour $n = 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$r^2 = r + 1 \quad \text{de racines} \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Les conditions initiales donnent le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 2 \end{cases} \quad \text{de solution} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{r_2 - 2}{r_2 - r_1} = \frac{r_1^2}{\sqrt{5}} \\ \mu = \frac{r_1 - 2}{r_1 - r_2} = -\frac{r_2^2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

- (d) Notons E_n l'ensemble des parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$ et considérons $\varphi : E_n \longrightarrow \{0, 1\}^n$ définie par

$$\forall X \in E_n, \quad \varphi(X) = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que φ est bijective, de réciproque

$$\psi : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = 1\}$$

Par construction, un élément de E_n est une partie lacunaire si et seulement si il ne contient pas deux entiers consécutifs, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi(X)$ ne contient pas deux 1 consécutifs. Par ailleurs, le cardinal d'un élément X est clairement égal au nombre de coordonnées égales à 1 dans $\varphi(X)$. La bijectivité de φ permet donc de conclure :

La quantité $v_{n,p}$ est égale au nombre d'éléments de $\{0, 1\}^n$ comportant $n - p$ zéros et jamais deux 1 consécutifs.

- (e) Fixons donc $p \in \mathbb{N}$. Un élément de $\{0, 1\}^n$ ne comporte pas deux 1 consécutifs si et seulement si chaque 1 parmi les $n - 1$ première coordonnées est suivi d'un zéro. Pour construire un tel mot contenant $n - p$ zéros, on procède de la manière suivante :

- On choisit une suite quelconque de $\{0, 1\}^{n+1-p}$ contenant p fois l'élément 1. Le nombre de choix possibles pour une telle suite est égal à $\binom{n+1-p}{p}$ (on choisit les positions des 1).
- Après chaque 1 de la suite, on insère un 0. Puisqu'il y a $n + 1 - p$ éléments donc p fois 1 dans la suite, on obtient une liste de $n + 1$ éléments qui termine nécessairement par un 0.
- On supprime pour finir le dernier 0 en bout de liste.

On vérifie facilement que cette application induit une bijection entre l'ensemble des suites de $\{0, 1\}^{n+1-p}$ **quelconques** contenant p fois l'élément 1, et les suites de $\{0, 1\}^n$ contenant p fois l'élément 1 mais jamais deux 1 consécutifs. D'après tout ce qui précède, on en déduit donc que

$$\text{Le nombre de parties lacunaires de } \llbracket 1; n \rrbracket \text{ à } p \text{ éléments est égal à } \binom{n+1-p}{p}.$$

3

(**)

Mines PC 2017

Déterminer le nombre d'applications $f : \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$.

Soit $f : \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$. On vérifie facilement que f vérifie $f \circ f = f$ si et seulement si les éléments de l'image de f sont des points fixes de f . Pour construire une telle application, on procède donc de la façon suivante :

- On choisit un entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ puis les k éléments de l'image de f . Pour k fixé, on a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour ces éléments. Ces derniers sont nécessairement leur propre image par f .
- Il reste à choisir les images des $n - k$ éléments restants. Pour chacun d'entre eux, on a k choix possibles parmi les éléments de l'image de f .

On en déduit donc que

Le nombre a_n de fonctions $f : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ vérifiant $f \circ f = f$ est égal à

$$a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}$$

4

(**)

Un nombre réel x est un nombre algébrique (resp. un entier algébrique) s'il existe un polynôme P (resp. un polynôme unitaire) à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$. A titre d'exemple, $\sqrt{2}$ qui est connu pour être irrationnel est un entier algébrique puisque racine du polynôme $X^2 - 2$.

- Montrer que les éléments de $\mathbb{Q}$ sont des nombres algébriques. Quels sont parmi eux les entiers algébriques ?
- Justifier que l'ensemble des nombres algébriques est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.
- Un réel est dit transcendant s'il n'est pas algébrique. Que peut-on déduire de la question précédente ?

- Soit $r \in \mathbb{Q}$. On note $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Alors, $P = qX - p$ annule r , ce qui prouve que tout rationnel est algébrique.

Supposons maintenant que r est un **entier** algébrique. Il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(r) = 0$. Notons ainsi

$$P = X^n + \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{de sorte que} \quad P(r) = \frac{p^n}{q^n} + \sum_{k=0}^n a_k \frac{p^k}{q^k}$$

En multipliant par q^n , il vient
$$p^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k} = -q \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k}$$

En particulier, q divise p^n . Si $q \neq 1$, il admet un diviseur premier a qui divise donc p^n et donc p car a est premier. Ainsi, p et q ne sont pas premiers entre eux ce qui est une absurdité. Ainsi, $q = 1$ et r est entier.

Réciproquement, tout entier (relatif) est clairement un entier algébrique. Ainsi,

Les rationnels sont des réels algébriques. Parmi eux, seuls les entiers sont des entiers algébriques.

- Commençons par justifier que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable. Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$$

Or, $\mathbb{Z}_n[X]$ est en bijection avec $\mathbb{Z}^{n+1}$ via l'application qui à un polynôme associe ses coefficients. Puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{Z}^{n+1}$ l'est aussi pour tout entier n , et donc $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable, puis $\mathbb{Z}[X]$ comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Puisque $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable, $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ également et il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$ telle que $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} = \{P_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors, par définition, si on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques, et $Z(P)$ l'ensemble des racines d'un polynôme P ,

$$\mathcal{A} = \{Z(P), P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z(P_n)$$

Notons que $Z(P_n)$ est un ensemble fini pour tout entier n , car un polynôme n'a qu'un nombre fini de racines. Ainsi, $\mathcal{A}$ est la réunion dénombrable d'ensembles finis donc d'après le cours,

L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

- L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, qui lui n'est pas dénombrable. On en déduit notamment que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ ne sont pas égaux. En d'autres termes,

Il existe des réels transcendants.

Remarque : On peut démontrer, mais c'est loin d'être évident, que π et e sont transcendants. La démonstration se fait par l'absurde, en construisant à partir de l'hypothèse d'algébricité une suite d'entiers non nuls mais de limite nulle, ce qui est impossible.

5

(**)

Soient E et Ω deux ensembles quelconques non vides et $f : E \rightarrow \Omega$ une application. Pour toute partie A de Ω , on note $f^{-1}(A)$ l'image réciproque de la partie A par f .

(a). Montrer que pour toutes parties A et B de Ω ,

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)} \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

En déduire $f^{-1}(\emptyset)$ et $f^{-1}(A \cap B)$.

(b). Les égalités précédentes sont-elles conservées pour des intersections ou des unions dénombrables de parties ?

(c). Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω . Montrer que $\mathcal{U}$ est une tribu sur E avec

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{T}\}$$

(d). Donner un exemple d'ensembles E et Ω et d'application $f : E \rightarrow \Omega$ telle que l'image de la tribu $\mathcal{P}(E)$ par f ne soit pas une tribu sur Ω .

(a). On raisonne par équivalence : soit $x \in E$. Alors,

$$x \in f^{-1}(\overline{A}) \iff f(x) \in \overline{A} \iff f(x) \notin A \iff \text{non } (f(x) \in A) \iff \text{non } (x \in f^{-1}(A))$$

et donc

$$x \in f^{-1}(\overline{A}) \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in \overline{f^{-1}(A)}$$

De manière similaire,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)} \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}$$

Il est clair que $f^{-1}(\Omega) = \{x \in E, f(x) \in \Omega\} = E$ donc

$$f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(\overline{\Omega}) = \overline{f^{-1}(\Omega)} = \overline{E} = \emptyset$$

Pour finir, à l'aide de l'égalité $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$ et de l'égalité précédente, il vient

$$f^{-1}(A \cap B) = \overline{f^{-1}(\overline{A} \cup \overline{B})} = \overline{f^{-1}(\overline{A}) \cup f^{-1}(\overline{B})} = \overline{f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)} = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$\boxed{f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$$

(b). Le raisonnement pour deux parties s'adapte facilement à une réunion dénombrable (et même quelconque) de parties. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties de Ω et $x \in E$. Alors,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &\iff f(x) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad f(x) \in A_n \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad x \in f^{-1}(A_n) \\ x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &\iff x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\boxed{f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)}$$

La preuve est similaire pour une intersection dénombrable, ou peut à nouveau se déduire de celle-ci à l'aide de passages au complémentaire.

(c). Il suffit de vérifier les trois axiomes des tribus :

- Par définition, $\emptyset \in \mathcal{T}$ donc $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{U}$.
- Si A est un élément de $\mathcal{U}$, alors il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A = f^{-1}(B)$ et d'après la première question

$$\overline{A} = \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$$

Or B est dans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est une tribu, donc $\overline{B}$ est un élément de $\mathcal{T}$ et ainsi, $\overline{A}$ est un élément de $\mathcal{U}$.

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}$, il existe par définition pour tout entier n un élément B_n de $\mathcal{T}$ tel que $A_n = f^{-1}(B_n)$. Dès lors, d'après la question précédente,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$$

Mais puisque $\mathcal{T}$ est une tribu, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est un élément de $\mathcal{T}$, ce qui prouve que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathcal{U}$.

La famille $\mathcal{U}$ est une tribu sur E .

- (d). Il suffit de prendre Ω ayant au moins deux éléments et une fonction f constante. Alors l'image de la tribu $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des deux parties $\{\emptyset, \{a\}\}$ où a est l'unique élément de l'image de f . Cette dernière famille n'est alors pas stable par passage au complémentaire.

L'image directe par une application $f : E \longrightarrow \Omega$ d'une tribu de E n'est pas nécessairement une tribu sur Ω .

6 _____ (*) _____ **Mines PC 2017**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle non nulle, décroissante et de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\llbracket n; +\infty \rrbracket) = \lambda \cdot a_n$$

Raisonnons par analyse-synthèse. Si un tel réel λ existe, alors

$$P(\mathbb{N}) = 1 = P(\llbracket 0; +\infty \rrbracket) = \lambda \cdot a_0$$

Notons que puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, alors $0 \leq a_n \leq a_0$ pour tout entier n . Si $a_0 = 0$, la suite est donc nulle, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi, $a_0 > 0$, ce qui permet d'écrire que

$$\lambda = \frac{1}{a_0}$$

Ensuite, pour tout entier n , on a $\{n\} = \llbracket n; +\infty \rrbracket \setminus \llbracket n+1; +\infty \rrbracket$

d'où $P(\{n\}) = P(\llbracket n; +\infty \rrbracket) - P(\llbracket n+1; +\infty \rrbracket) = \lambda \cdot a_n - \lambda \cdot a_{n+1}$

et finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{n\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$

Réciproquement, posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$

Par décroissance de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il s'agit bien d'une famille de réels positifs. De plus, par télescopage et sachant que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0} = \frac{1}{a_0} \left(a_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) = 1$$

Le germe de probabilité assure alors l'existence d'une probabilité P sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{n\}) = b_n$$

Par suite, pour tout entier n , un nouveau télescopage donne

$$P(\llbracket n; +\infty \rrbracket) = P\left(\bigcup_{k \geq n} \{k\}\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(\{k\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_0} = \frac{1}{a_0} \left(a_n - \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \right) = \frac{1}{a_0} a_n$$

ce qui établit la réciproque. Pour conclure,

Il faut et il suffit que $\lambda = 1/a_0$ pour qu'il existe une probabilité sur $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\llbracket n; +\infty \rrbracket) = \lambda \cdot a_n$$

7 _____ (**) _____ **Centrale PC 2017**

Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé, A et B deux événements. Montrer que

$$|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

Soient A et B deux évènements. Alors, on a l'union disjointe

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \quad \text{d'où} \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$$

De la même manière,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

Par conséquent, en réinjectant ces deux égalités puis en développant comme un bourrin, il vient

$$P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) - [P(A \cap B)^2 + P(A \cap B)P(A \setminus B) + P(A \cap B)P(B \setminus A) + P(B \setminus A)P(A \setminus B)]$$

et en particulier,

$$P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) \leq P(A \cap B) - P(A \cap B)^2$$

Une étude rapide montre que l'application $x \mapsto x - x^2$ est à valeurs dans $[0; 1/4]$ sur $[0; 1]$, et notamment majorée par $1/4$. Finalement,

$$P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) \leq \frac{1}{4}$$

Pour montrer la minoration, notons cette fois que d'une part on a l'union disjointe

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \quad \text{d'où} \quad P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$$

et d'autre part

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$

En réinjectant ces deux égalités, il vient

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) - P(A) \cdot (1 - P(\overline{B})) = P(A) \cdot P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$$

En appliquant la première majoration aux évènements A et $\overline{B}$, on obtient

$$P(A \cap \overline{B}) - P(A) \cdot P(\overline{B}) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et donc} \quad P(A) \cdot P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \geq -\frac{1}{4}$$

Finalement

$$-\frac{1}{4} \leq P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$$

soit bien

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

8 _____ (*) _____

Soit $\alpha, \beta \in]0; 1[$. On admet que l'on peut définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$ qui vérifie

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(\{(i, j)\}) = \alpha \beta (1 - \alpha)^i (1 - \beta)^j$$

Déterminer les probabilités des évènements suivants :

- (a) $A_i = \{(i, k), k \in \mathbb{N}\}$ et $B_j = \{(k, j), k \in \mathbb{N}\}$ pour tous i, j .
- (b) $C = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i > j\}$ et $D = \{(i, i), i \in \mathbb{N}\}$.

(a). Soit $i \in \mathbb{N}$. En écrivant l'ensemble A_i comme la réunion de ses éléments, il vient par union disjointe

$$P(A_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{(i, k)\}) = \alpha (1 - \alpha)^i \sum_{k=0}^{+\infty} \beta (1 - \beta)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, et ainsi

$$P(A_i) = \alpha (1 - \alpha)^i \frac{\beta}{1 - (1 - \beta)} = \alpha (1 - \alpha)^i$$

Le calcul de $P(B_j)$ est complètement symétrique, et finalement

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad P(A_i) = \alpha (1 - \alpha)^i \quad \text{et} \quad P(B_j) = \beta (1 - \beta)^j$$

(b). De la même manière,

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{(i, i)\}) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha (1 - \alpha)^i \beta (1 - \beta)^i \\ P(D) &= \frac{\alpha \beta}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \end{aligned}$$

Pour calculer $P(C)$, commençons par introduire pour tout entier j ,

$$C_j = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i > j\} \quad \text{de sorte que} \quad C = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$$

où l'union est disjointe. Le calcul de $P(C_j)$ est similaire à celui de B_j (la somme démarrant cette fois au rang $j + 1$). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}, \quad P(C_j) &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} \alpha \beta (1 - \alpha)^k (1 - \beta)^j & \text{puis} & \quad P(C) = \sum_{j=0}^{+\infty} \beta (1 - \alpha)^{j+1} (1 - \beta)^j \\ &= \alpha \beta (1 - \beta)^j \sum_{k=j+1}^{+\infty} (1 - \alpha)^k & & \quad = \sum_{j=0}^{+\infty} P(C_j) \\ &= \alpha \beta (1 - \beta)^j \frac{(1 - \alpha)^{j+1}}{1 - (1 - \alpha)} & & \quad = \beta (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{+\infty} ((1 - \alpha)(1 - \beta))^j \\ P(C_j) &= \beta (1 - \alpha)^{j+1} (1 - \beta)^j & & \quad P(C) = \frac{\beta (1 - \alpha)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \end{aligned}$$

Finalement

$$P(C) = \frac{\beta (1 - \alpha)}{\alpha + \beta - \alpha \beta} \quad \text{et} \quad P(D) = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta - \alpha \beta}$$

9 _____ (*) _____

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé. Justifier que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Pour tout entier n , on note

$$B_n = \bigcap_{k \in [0; n]} A_k$$

Il est clair que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, donc par continuité décroissante :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$$

Mais puisque les évènements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(B_n) = \prod_{k=0}^n P(A_k) \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \prod_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$

Pour conclure, il n'y a plus qu'à remarquer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

et finalement

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

10 _____ (*) _____

Deux joueurs, Alice et Bob, jouent à pile ou face avec une pièce truquée qui fait face avec une probabilité $p \in]0; 1[$. C'est Alice qui démarre. Le premier qui fait face gagne la partie.

- Quelle est la probabilité que Alice gagne à son n -ième lancer ?
- Quelle est la probabilité que Alice gagne ?

- (c). Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?
 (d). Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

(a). On utilise la modélisation suivante : $\Omega = \{\underbrace{P \cdots P}_n F, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$

muni de la probabilité $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{\underbrace{P \cdots P}_n F\}) = p(1-p)^n$

L'évènement « Alice gagne lors de son n -ième lancer » est alors $\{\underbrace{P \cdots P}_{2(n-1)} F\}$ car Alice gagne à son n -ième lancer si et seulement si elle et Bob réalisent des piles lors de leurs $n-1$ premiers lancers. Ainsi,

$$\boxed{\text{Alice gagne à son } n\text{-ième lancer avec probabilité } p(1-p)^{2(n-1)}.$$

- (b). L'évènement « Alice gagne » est la réunion des évènements deux à deux incompatibles « Alice gagne à son n -ième lancer ». Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(\text{« A gagne »}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(\text{« A gagne à son } n\text{-ième lancer »}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2(n-1)} \\ P(\text{« A gagne »}) &= \frac{p}{1 - (1-p)^2} \end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\text{Alice gagne avec probabilité } \frac{1}{2-p}.$$

- (c). La probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est égale à $P(\{\infty\})$. Par définition d'une probabilité,

$$P(\{\infty\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\underbrace{P \cdots P}_n F\}) = 1$$

Mais
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\underbrace{P \cdots P}_n F\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = p \frac{1}{1 - (1-p)} = 1$$

d'où nécessairement $P(\{\infty\}) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle.}}$$

- (d). Les évènements « Alice gagne », « Bob gagne » et « Le jeu ne s'arrête jamais » forment un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned} P(\text{« Bob gagne »}) &= 1 - P(\text{« Alice gagne »}) - P(\text{« Le jeu ne s'arrête jamais »}) \\ &= 1 - \frac{1}{2-p} - 0 = \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

Puisque $p \in]0; 1[$, $1-p < p$ de sorte que

$$\boxed{\text{Quelle que soit la valeur de } p, \text{ Alice a plus de chances de gagner.}}$$

11 _____ (*) _____ **X PC 2017**

Une urne contient une boule blanche et une deuxième boule aléatoire, blanche ou noire, chaque couleur ayant une probabilité $1/2$. On effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

Soit A l'évènement « la deuxième boule de l'urne est blanche » et pour $i \in \{1, 2\}$, B_i l'évènement « on pioche une boule au i -ième tirage ». Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$$

Par formule des probabilités totales, d'une part

$$P(B_1 \cap B_2) = P(A) \cdot P_A(B_1 \cap B_2) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B_1 \cap B_2)$$

Or, clairement

$$P_A(B_1 \cap B_2) = 1 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(B_1 \cap B_2) = 0$$

et ainsi puisque $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$,

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2}$$

D'autre part, de la même manière

$$P(B_1) = P(A) \cdot P_A(B_1) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B_1)$$

Cette fois

$$P_A(B_1) = 1 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(B_1) = \frac{1}{2}$$

et donc

$$P(B_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Finalement,

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

La probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une blanche est égale à $2/3$.

12 _____ (*) _____ **X PC 2017**

On considère un dé rouge truqué qui fait 6 avec probabilité $p \in]0; 1[$, les autres issues étant équiprobables, et un dé blanc non truqué. On lance simultanément les deux dés, un pour chaque joueur. En cas d'égalité, le dé blanc gagne. Quel dé faut-il choisir ?

Pour simplifier la rédaction, on va s'autoriser à parler de variables aléatoires. Notons X le résultat du dé rouge et Y le résultat du dé blanc. On cherche la probabilité de l'évènement $X > Y$. Alors, les lancers des dés étant indépendants,

$$P(X > Y) = \sum_{i=2}^6 \left(\sum_{j=1}^{i-1} P(X=i, Y=j) \right) = \sum_{i=2}^6 \left(P(X=i) \sum_{j=1}^{i-1} P(Y=j) \right)$$

Le dé blanc étant non truqué, $P(Y=j) = 1/6$ pour tout j , et ainsi

$$P(X > Y) = \sum_{i=2}^6 \left(P(X=i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \sum_{i=2}^6 (i-1) \cdot P(X=i)$$

Par ailleurs, $P(X=6) = p$ et $P(X_i=i) = (1-p)/5$ pour $i \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$ donc

$$P(X > Y) = \frac{5}{6}p + \frac{1-p}{30} \cdot \sum_{i=2}^5 (i-1) = \frac{5}{6}p + \frac{1-p}{30} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{1}{3} + \frac{p}{2}$$

On choisit le dé rouge si et seulement si la probabilité de victoire est supérieure ou égale à $1/2$. Par conséquent,

Si $p \geq 1/3$, il faut choisir le dé rouge. Sinon, il faut prendre le dé blanc.

13 _____ (**) _____ **Mines PC 2017**

On répartit aléatoirement $p \geq 1$ jetons dans $n \geq 1$ cases. On note A_i l'évènement « la i -ième case est vide ». Calculer la probabilité de l'évènement $A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Utilisons la formule d'inclusion-exclusion, dont la version probabiliste s'écrit de la manière suivante :

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Notons que dans la deuxième somme, le terme $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ ne dépend pas des indices $i_1, \dots, i_k$, mais seulement de k . En effet, en terme d'évènements,

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} = \text{« Les cases } i_1, \dots, i_k \text{ sont vides. »}$$

La probabilité de cet évènement est donc celle répartir les p jetons dans seulement $n - k$ cases fixées à l'avance. Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall i_1 < \dots < i_k, \quad P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \left(\frac{n-k}{n} \right)^p = \left(1 - \frac{k}{n} \right)^p$$

Puisqu'il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k indices $i_1 < \dots < i_k$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit que

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^p$$

Remarque : Pour $n = 2$ et $n = 3$, la formule d'inclusion-exclusion donne les égalités bien connues

$$P(A_1 \cup A_2) = [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)]$$

$$\text{et } P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)] - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)] + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Le cas général s'obtient par récurrence sur n , à partir de l'égalité au rang 2. La preuve est plus technique (surtout pour la gestion des indices) que difficile.

On pouvait également chercher à raisonner sur l'évènement contraire et déterminer $P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n})$ soit $P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n})$. En d'autres termes, on cherche la probabilité de ne laisser aucune case vide, ce qui revient à construire une surjection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. Calculer le nombre $S_{p,n}$ de telles surjections est un exercice classique. Diverses méthodes permettent d'obtenir

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Sachant qu'il y a au total n^p applications entre $\llbracket 1; p \rrbracket$ et $\llbracket 1; n \rrbracket$, il vient

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}) = 1 - \frac{S_{p,n}}{n^p}$$

Le terme d'indice n de la somme se simplifie, et un changement d'indice permet de retrouver l'expression ci-dessus.

14 _____ (*) _____ **Mines PC 2017**

On considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. Si on tire une boule rouge, on la remet dans l'urne. Si on tire une blanche, on la retire définitivement. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de tirer une boule blanche exactement en n tirages ?

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Notons ω_k l'issue consistant à tirer une boule blanche au k -ième tirage et une rouge à tous les autres. Alors,

$$P(\{\omega_k\}) = \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1} \cdot \frac{b}{b+r} \left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-k} = \frac{b \cdot r^{n-1}}{(b+r-1)^n} \cdot \left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^k$$

Si l'on note A l'évènement « on ne pioche qu'une blanche sur n tirages », alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(\{\omega_k\})$$

En utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient

$$P(A) = \frac{b \cdot r^{n-1}}{(b+r-1)^n} \frac{\frac{b+r-1}{b+r} - \left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)}$$

Après quelques simplifications (pas forcément exigées je pense), on obtient finalement que

La probabilité de tirer une boule blanche exactement en n tirages est donnée par

$$b \cdot r^{n-1} \cdot (b+r-1) \cdot \left[\frac{1}{(b+r-1)^n} - \frac{1}{(b+r)^n} \right]$$

15 _____ (*) _____ **Centrale PC 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $2n$ équipes sportives, n en première division et n en deuxième. On organise n matches.

- Soit p_n la probabilité que les n équipes de première division affrontent des équipes de deuxième division. Exprimer p_n en fonction de n .
- Etudier la convergence de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Pour simplifier les dénombrements, on suppose les équipes numérotées de 1 à $2n$, les équipes de première division (resp. deuxième) étant numérotées de 1 à n (resp. $n+1$ à $2n$).

- Comptons le nombre de façons a_n d'organiser n matchs entre $2n$ équipes. On commence par choisir l'adversaire de l'équipe 1 parmi $2n - 1$ choix possibles. Après quoi il reste $2n - 2$ équipes entre lesquelles organiser $n - 1$ matchs donc a_{n-1} possibilités. On en déduit la formule de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = (2n - 1) \cdot a_{n-1}$$

d'où l'on déduit par récurrence immédiate et puisque $a_1 = 1$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \prod_{k=1}^n (2k - 1) \quad \text{puis} \quad a_n = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

en rajoutant les termes pairs dans le produit. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

- Comptons maintenant le nombre de façons d'organiser les matchs de façon à ce que les matchs n'opposent que des équipes de divisions différentes. On a cette fois n choix pour l'équipe 1, puis $n - 1$ pour l'équipe 2 et ainsi de suite, donc $n!$ possibilités au total.

La probabilité cherchée est le quotient de ces quantités. Par conséquent,

$$p_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

(b). D'après la formule de Stirling,

$$(2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Par suite

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n \sqrt{n\pi}}$$

et en particulier

$$p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

16

(***)

Mme Ringot et Mr Puyhaubert s'affrontent à pile ou face suivant le principe suivant : ils lancent indéfiniment une pièce équilibrée et

- Mme Ringot gagne si la configuration , *pile*, *pile*, *face* apparaît dans la suite des lancers avant que *face*, *pile*, *pile* n'apparaisse.
- Mr Puyhaubert gagne si la configuration *face*, *pile*, *pile* apparaît dans la suite des lancers avant que *pile*, *pile*, *face* n'apparaisse.

On cherche à déterminer lequel des deux a la plus grande probabilité de gagner.

- Pour tout $n \geq 3$, on note R_n l'évènement « Mme Ringot est déclarée gagnante à l'issue du n -ième lancer » et on pose $r_n = P(R_n)$. Calculer r_3 , r_4 puis r_n pour tout entier n , et en déduire la probabilité que Mme Ringot gagne le duel.
- Pour tout $n \geq 1$, on note d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaisse jamais deux *pile* consécutifs.
 - Calculer d_1 et d_2 .
 - En considérant le résultat des deux premiers lancers, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

- En déduire que $\sum_{n \geq 0} d_n$ converge et calculer sa somme.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (resp. B_n) l'évènement « un joueur est déclaré gagnant à l'issue du n -ième lancer » (resp. « personne n'a encore gagné à l'issue du n -ième lancer »).

- Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$P(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

- En déduire que pour tout $n \geq 3$,

$$P(A_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$$

- Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

(d). Dédurre des questions précédentes la probabilité de victoire de Mr Puyhaubert et conclure.

Pour simplifier, on notera R. Mme Ringot et P. Mr Puyhaubert dans toute la suite.

(a). Commençons par signaler que $r_1 = r_2 = 0$ pour des raisons élémentaires. Ensuite,

- Il est clair que R. gagne au 3-ième lancer si et seulement si les trois premiers résultats sont *pile*, *pile*, *face*, ce qui est un évènement de probabilité $1/8$.
- Pour que R. gagne au 4-ième lancer, il faut que les 3 derniers résultats soient *pile*, *pile*, *face*. Mais il faut également que P. n'ait pas gagné avant, ce qui implique que le premier lancer ne doit pas valoir *face*. La seule séquence possible est donc *pile*, *pile*, *pile*, *face*, de probabilité $1/16$.
- Plus généralement, si R. gagne au n -ième tour, les résultats des lancers $n-2$, $n-1$ et n sont nécessairement *pile*, *pile*, *face*. Pour éviter que P. n'ait gagné au $n-1$ lancer, il faut que le lancer $n-3$ soit également un *pile* puis, par récurrence immédiate que tous les lancers précédents soient également des *pile*. La seule séquence possible est donc $n-1$ *piles* suivi d'un *face*, de probabilité $1/2^n$.

Ainsi,

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 3, \quad r_n = \frac{1}{2^n}$$

Par définition,

$$\ll \text{R. gagne} \gg = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \ll \text{R. gagne au } n\text{-ième lancer} \gg$$

d'où

$$P(\text{R. gagne}) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/8}{1 - (1/2)}$$

Finalement

$$\text{R. gagne avec probabilité } 1/4.$$

(b). (i) Il est clair que

$$d_1 = 1 \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{3}{4}$$

(ii) Pour tout entier n , notons E_n l'évènement « on n'a pas deux *pile* consécutifs sur les n premiers lancers » puis P_n (resp. F_n) l'évènement « on fait *pile* (resp. *face*) au n -ième lancer ». La famille $(P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2, F_1)$ est un système complet d'évènements donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$E_{n+2} = (E_{n+2} \cap P_1 \cap P_2) \cup (E_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) \cup (E_{n+2} \cap F_1)$$

- Par définition, $E_{n+2} \cap P_1 \cap P_2$ est vide.
- Si l'on note E'_{n+2} l'évènement « on ne fait pas deux *piles* consécutifs entre le 2-ième et le $(n+2)$ -ième lancer », alors

$$E_{n+2} \cap F_1 = E'_{n+2} \cap F_1$$

Les lancers étant indépendants, les évènements E'_{n+2} et F_1 le sont également (ils concernent des lancers disjoints), et ainsi

$$P(E_{n+2} \cap F_1) = P(E'_{n+2} \cap F_1) = P(E'_{n+2}) \cdot P(F_1)$$

Enfin, il est clair que E'_{n+2} a la même probabilité que E_{n+1} , c'est-à-dire d_{n+1} . Finalement,

$$P(E_{n+2} \cap F_1) = \frac{1}{2} d_{n+1}$$

- De manière similaire, si l'on note E''_{n+2} l'évènement « on ne fait pas deux *piles* consécutifs entre le 3-ième et le $(n+2)$ -ième lancer », alors

$$E_{n+2} \cap P_1 \cap F_2 = E''_{n+2} \cap P_1 \cap F_2$$

puis par des arguments similaires,

$$P(E_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) = P(E''_{n+2}) \cdot P(P_1) \cdot P(F_2) = P(E_n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} d_n$$

On peut donc en conclure que

$$\forall n \geq 1, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n$$

- (iii) La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est

$$r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{de racines} \quad (r_1, r_2) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)$$

Par suite, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = \lambda \cdot r_1^n + \mu \cdot r_2^n$$

Dès lors que $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, d_n est une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques convergentes. Par suite,

La série $\sum_{n \geq 1} d_n$ est convergente.

Pour calculer la somme de cette série, on peut éviter de calculer explicitement l'expression de d_n en fonction de n (ce qui est plutôt laborieux). L'astuce consiste à sommer la relation de récurrence pour n allant de 1 à $+\infty$, puis d'effectuer des changements d'indices. Plus précisément,

$$\forall n \geq 1, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$$

Notons que les trois séries sont convergentes bien entendu. Par changement d'indice, il vient

$$\sum_{n=3}^{+\infty} d_n = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} d_n + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \quad \text{soit} \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \right) - d_1 - d_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \right) - d_1 \right] + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$$

et donc

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{d_1}{2} + d_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

Finalement,

$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$

- (c). (i) Soit $n \geq 2$. On considère à nouveau l'évènement E_n introduit à la question (b.ii). Alors,

$$B_n = (B_n \cap E_n) \cup (B_n \cap \overline{E_n})$$

Notons que $E_n \subset B_n$ car personne ne peut avoir gagné si on ne fait jamais deux *pires* consécutifs. Ainsi,

$$B_n \cap E_n = E_n \quad \text{et} \quad P(B_n \cap E_n) = P(E_n) = d_n$$

Par ailleurs, si on fait au moins deux *pires* consécutifs, la seule possibilité pour que personne n'ait gagné est qu'on n'ait fait que des *pires* à tous les tirages (sans quoi la séquence comporte au moins un *pile*, *pile*, *face* ou un *face*, *pile*, *pile*). L'évènement $B_n \cap \overline{E_n}$ est donc réduit à l'unique séquence de n *pires*, de probabilité $1/2^n$. Par suite,

$\forall n \geq 2, \quad P(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$

- (ii) Soit $n \geq 3$. Par définition, $\overline{B_n}$ désigne l'évènement « quelqu'un a gagné au plus tard au n -ième tirage » tandis que A_n signifie « on gagne au n -ième tirage précisément ». Dès lors, on a l'union disjointe

$$\overline{B_n} = \overline{B_{n-1}} \cup A_n$$

Par conséquent,

$$P(A_{n-1}) = P(\overline{B_n}) - P(\overline{B_{n-1}}) = (1 - P(B_n)) - (1 - P(B_{n-1}))$$

Compte-tenu du résultat de la question précédente, on en déduit aussitôt que

$\forall n \geq 3, \quad P(A_n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$

- (iii) Si l'on note C l'évènement « personne ne gagne », alors avec les notations précédentes

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion : si personne n'a gagné après $n+1$ tirages, alors personne n'a gagné après n tirages non plus. Par continuité décroissante,

$$P(C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$$

La suite $(d_n)_{n \geq 2}$ tend vers 0 puisque la série associée est convergente, de même que $(1/2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'expression de la question (b.i) permet donc de conclure que $P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc

La probabilité que personne ne gagne est nulle.

- (d). Soit R. gagne, soit P. gagne, soit personne ne gagne. On connaît maintenant les probabilités de deux de ces évènements. Par suite,

Mr Puyhaubert gagne avec probabilité $3/4$.

Moralité : Si vous voulez jouer à un jeu de hasard, évitez de jouer contre un mathématicien. Choisissez plutôt un physicien.