I. Une propriété sur les sommes de Riemann

1 Attention à ne pas se laisser berner par l'apparente facilité de cette première question : elle contient de petites subtilités en raison desquelles la seule invocation du théorème des sommes de Riemann ne suffit pas.

Par hypothèse, la fonction g est prolongeable par continuité au segment $[\,a\,;b\,]$. Elle est donc intégrable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$. Puisque, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!]$,

$$a + k\frac{b-a}{n} \in \,]\,a\,;b\,[$$

on a, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \frac{f(a)}{n}\end{aligned}$$

Or, d'une part, $f(a)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et d'autre part, le théorème des sommes de Riemann pour les fonctions continues sur un segment assure que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Finalement, comme f et g sont intégrables sur $]\,a\,;b\,[$ et coïncident sur ce même intervalle,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a ainsi prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

autrement dit, $\boxed{g \in \mathcal{D}_{a,b}}$

2 Commençons par calculer la différence des quantités à comparer : pour tout $k \geqslant 1$,

$$a_k - b_{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}}$$

Or, d'après le théorème des croissances comparées,

$$\frac{k(k+1)}{2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, pour k au voisinage de $+\infty$,

$$a_k - b_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

soit encore
$$a_k - b_{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k+1)}$$

La quantité $a_k - b_{k+1}$ étant équivalente à une quantité strictement positive, elle est également strictement positive à partir d'un certain rang k_0. En conclusion,

$$\boxed{\exists k_0 \geqslant 1 \quad \forall k \geqslant k_0 \qquad b_{k+1} < a_k}$$

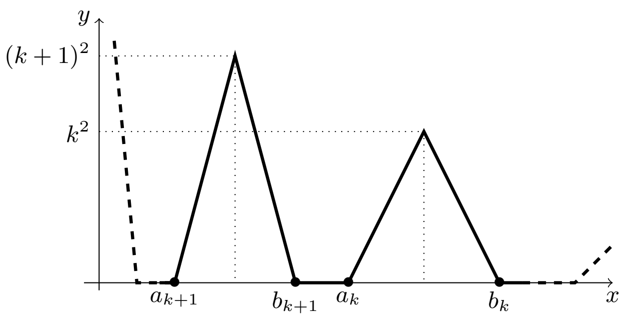
Pour la seconde partie de la question, justifions d'abord que la fonction f est bien définie. Pour cela, remarquons que pour tout $k \geqslant k_0$, $a_k < b_k$. Ainsi, grâce au résultat montré en première partie de question,

$$\forall k \geqslant k_0 \qquad a_{k+1} < b_{k+1} < a_k < b_k$$

Les intervalles $([\,a_k\,;b_k\,])_{k\geqslant k_0}$ sont donc deux à deux disjoints. Soit $t \in \,]\,0\,;1\,[$. Examinons plusieurs cas :

- S'il existe $k \geqslant k_0$ tel que $t \in [\,a_k\,;b_k\,]$, nécessairement un tel k est unique d'après le raisonnement précédent. Alors :
  - Si $t \in \left[\,a_k\,;a_k + 1/2^{k+1}\,\right[$, alors $f(t) = k^2 2^{k+1}(t-a_k)$ et cette quantité est bien définie.
  - De même, si $t \in \left]\,a_k + 1/2^{k+1}\,;b_k\,\right]$, alors $f(t) = k^2 2^{k+1}(b_k - t)$ et cette quantité est également bien définie.
  - Enfin, si $t = a_k + 1/2^{k+1}$, alors $b_k - t = t - a_k = 1/2^{k+1}$ d'où $f(t) = k^2$.
- S'il n'existe pas de tel k, alors $f(t) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie.}}$

> La figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) permet de se faire une idée de l'allure du graphe de f.
>
> 
>

La fonction f étant affine par morceaux, elle est continue sur tous les intervalles

$$\left(\left]\,a_k\,;a_k + 1/2^{k+1}\,\right[\right)_{k\geqslant k_0},\ \left(\left]\,a_k + 1/2^{k+1}\,;b_k\,\right[\right)_{k\geqslant k_0} \text{ et } (]\,b_{k+1}\,;a_k\,[)_{k\geqslant k_0}$$

(elle est même nulle sur cette dernière famille d'intervalles) ainsi que sur l'intervalle $]\,b_{k_0}\,;1\,[$ où elle est également nulle. Comme

$$a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

la réunion de tous ces intervalles est égale à l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. Vérifions que la fonction f est continue en chaque $(a_k)_{k\geqslant k_0}$, $\left(a_k + 1/2^{k+1}\right)_{k\geqslant k_0}$ et $(b_k)_{k\geqslant k_0}$. Soit $k \geqslant k_0$. On a

$$\lim_{t\to {a_k}^+} f(t) = \lim_{t\to {a_k}^+} k^2\ 2^{k+1}(t-a_k) = 0 = \lim_{t\to a_k -} f(t)$$

Comme $f(a_k) = 0$, cela prouve que f est continue en a_k. De même,

$$\lim_{t \to b_k^-} f(t) = \lim_{t \to b_k^-} k^2\ 2^{k+1}(b_k - t) = 0 = \lim_{t \to b_k+} f(t)$$

Puisque $f(b_k) = 0$, on a aussi prouvé que f est continue en b_k. Enfin,

$$\lim_{t \to (a_k+1/2^{k+1})^-} f(t) = \lim_{t \to (a_k+1/2^{k+1})^-} k^2\ 2^{k+1}(t - a_k) = k^2 = f\left(a_k + \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

et
$$\lim_{t \to (a_k+1/2^{k+1})^+} f(t) = \lim_{t \to (a_k+1/2^{k+1})^+} k^2\ 2^{k+1}(b_k - t) = k^2$$

La fonction f est donc également continue en $a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}$. On peut conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur }]\,0\,;1\,[.}$$

Prouvons maintenant que f est intégrable sur $]\,0\,;1\,[$. Comme elle est nulle en dehors des intervalles $([\,a_k\,;b_k\,])_{k \geqslant k_0}$, calculons d'abord son intégrale sur chacun de ces segments (ces intégrales existent puisque f est continue). Soit $k \geqslant k_0$. L'intégrale de f sur $[\,a_k\,;b_k\,]$ est égale à l'aire d'un triangle, de base

$$b_k - a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$

et de hauteur k^2. Par conséquent,

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k} \times k^2 = \frac{k^2}{2^{k+1}}$$

> Il est aussi possible de calculer l'intégrale en déterminant une primitive de la fonction intégrée sur chaque segment où elle est continue.

Par suite, pour tout $\mathrm{N} \geqslant k_0$, grâce à la relation de Chasles et à la nullité de f en dehors des intervalles $([\,a_k\,;b_k\,])_{k \geqslant k_0}$,

$$\int_{a_\mathrm{N}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=k_0}^{\mathrm{N}} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=k_0}^{\mathrm{N}} \frac{k^2}{2^{k+1}}$$

Comme, par croissances comparées,

$$\frac{k^4}{2^{k+1}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

on peut écrire, pour k au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{k^2}{2^{k+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Les termes de la somme sont par conséquent négligeables devant le terme général d'une série de Riemann convergente. Il s'ensuit que la série

$$\sum_{k \geqslant k_0} \frac{k^2}{2^{k+1}}$$

est convergente par comparaison de séries à termes positifs. Puisque $a_\mathrm{N} \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{} 0$, on obtient par passage à la limite

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}}$$

En particulier, l'intégrale de gauche est convergente. Comme la fonction f est positive sur $]\,0\,;1\,[$, cela permet de conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,[.}$$

> Il est possible de calculer explicitement la somme de cette série, en utilisant les dérivées première et seconde de la série entière $\sum x^k$ évaluées en $1/2$.

Soit maintenant $n \geqslant k_0$. La fonction f étant positive,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{n} n^2 = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Il s'ensuit par minoration

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et on a déjà prouvé que

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} < +\infty$$

Par conséquent, $$\boxed{f \notin \mathcal{D}_{0,1}}$$

> Cette question a donc permis de prouver, grâce à un contre-exemple, que le théorème des sommes de Riemann n'est plus valable lorsqu'on travaille avec des fonctions continues et intégrables sur un intervalle ouvert.

$\boxed{\mathbf{3}}$ La fonction $t \mapsto 2\sqrt{t}$ est une primitive de la fonction continue φ sur $]\,0\,;1\,[$. Par conséquent, pour tout $\mathrm{A} \in\,]\,0\,;1\,[$,

$$\int_{\mathrm{A}}^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\mathrm{A}} \xrightarrow[\mathrm{A}\to 0]{} 2$$

La fonction φ étant positive, cela prouve que

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,[.}$$

On a même $$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

> On aurait aussi pu justifier le caractère intégrable de φ en reconnaissant une intégrale de Riemann convergente, mais le calcul de l'intégrale va de toute façon s'avérer utile pour la suite.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k/n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Déterminons la limite de cette quantité en effectuant une comparaison série-intégrale. La fonction φ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable au voisinage de 0,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

En sommant ces inégalités, on obtient grâce à la relation de Chasles,

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_0^{n-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

En calculant les intégrales de gauche et de droite, il s'ensuit

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n-1} - 2\sqrt{0}$$

d'où
$$2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

Comme les membres de gauche et de droite convergent vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit du théorème d'encadrement que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

On a ainsi démontré que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\varphi \in \mathcal{D}_{0,1}}$$

$\boxed{4}$ Pour tout $t \in \,]\,0\,;1/2\,[$, $\widetilde{h}(t) = t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}$. La fonction $\widetilde{h}$ est par conséquent dérivable sur $]\,0\,;1/2\,[$ comme produit de fonctions dérivables. Soit $t \in \,]\,0\,;1/2\,[$. On a

$$\widetilde{h}'(t) = -\frac{1}{2}\left(t^{-3/2}(1-t)^{-1/2} - t^{-1/2}(1-t)^{-3/2}\right) = -\frac{1}{2}t^{-3/2}(1-t)^{-3/2}\,(1-2t)$$

Or,
$$t^{-3/2}(1-t)^{-3/2}\,(1-2t) \geqslant 0$$

d'où
$$\forall t \in \left]\,0\,;\frac{1}{2}\right[\qquad \widetilde{h}'(t) \leqslant 0$$

Cela prouve que
$$\boxed{\text{La fonction } \widetilde{h} \text{ est décroissante sur } \left]\,0\,;\frac{1}{2}\right[.}$$

Ce résultat invite à mettre à nouveau en œuvre une comparaison série-intégrale. Remarquons tout d'abord que la fonction $\widetilde{h}$ est continue sur $]\,0\,;1\,[$ et que

$$\widetilde{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$$

Or la fonction φ est intégrable sur $]\,0\,;1\,[$ d'après la question 3. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que la fonction $\widetilde{h}$ est intégrable sur $]\,0\,;1/2\,]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!]$, par décroissance de la fonction $\widetilde{h}$ sur l'intervalle $]\,0\,;1/2\,]$,

$$\int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n}\,\widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2n}\,\widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit, par la relation de Chasles,

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n}\,\widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \leqslant \int_0^{\frac{n-1}{2n}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $\dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{n-1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

on déduit du caractère intégrable de $\widetilde{h}$ sur $]\,0\,;1/2\,]$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{n-1}{2n}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$$

Le théorème d'encadrement permet alors d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n}\,\widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit encore $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{h}\left(\frac{k}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$

On a démontré que $\boxed{\widetilde{h} \in \mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}}$

5 La fonction h est continue sur $]\,0\,;1\,[$ et on a déjà justifié à la question précédente qu'elle est intégrable au voisinage de 0. En outre, pour t au voisinage de 1,

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

La fonction $t \mapsto 1-t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $]\,0\,;1\,[$, d'après le théorème de changement de variable en posant $u = 1-t$, les intégrales

$$\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \int_0^{1/2} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature. Comme celle de droite est convergente d'après la question 3, celle de gauche l'est également. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est donc intégrable au voisinage de 1, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,[.}$$

Remarquons alors que, pour tout $t \in\ ]\,0\,;1\,[$, $h(1-t) = h(t)$. Effectuons alors à nouveau le changement de variable $u = 1-t$. Cela donne

$$\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{1/2} h(1-u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_{1/2}^1 h(u)\,\mathrm{d}u$$

Alors, grâce à la relation de Chasles,

$$2\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme les fonctions h et $\widetilde{h}$ coïncident sur $]\,0\,;1/2\,]$, on conclut que

$$\boxed{\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} \widetilde{h}(t)\,\mathrm{d}t}$$

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation de Chasles permet d'écrire que

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right)$$

Intéressons-nous à la somme de droite. Comme, pour tout $t \in \,]\,0\,;1\,[\,$, $h(1-t) = h(t)$, celle-ci se réécrit

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(1 - \frac{k}{2n}\right) = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right)$$

Effectuons le changement d'indice $j = 2n - k$. Cela donne

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2n} h\left(\frac{j}{2n}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{j}{2n}\right) + \frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par suite, $$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right)$$

Or, d'après les questions 4 et 5,

$$2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$$

et par ailleurs, $$\frac{1}{2n} h\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En conclusion, $$\boxed{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t}$$

7 Effectuons une nouvelle comparaison série-intégrale. Étant donné que la fonction h est décroissante et intégrable sur $]\,0\,;1/2\,]$, et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $j \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, on a $j/(2n+1) \in [\,0\,;1/2\,]$,

$$\forall k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!] \qquad \int_{\frac{k}{2n+1}}^{\frac{k+1}{2n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{2n+1}}^{\frac{k}{2n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t$$

Cela entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{2n+1}}^{\frac{k+1}{2n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{2n+1}}^{\frac{k}{2n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où, d'après la relation de Chasles,

$$\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{n}{2n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leqslant \int_{0}^{\frac{n-1}{2n+1}} h(t)\,\mathrm{d}t$$

Étant donné que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

on déduit de l'intégrabilité de h sur $]\,0\,;1/2\,]$ et du théorème d'encadrement que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{n}{2n+1}\right)$$

La fonction h étant continue sur $]\,0\,;1\,[$,

$$\frac{1}{2n+1} h\left(\frac{n}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

d'où finalement $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t}$

Reproduisons alors le raisonnement de la question 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)$$

En se rappelant que $h(1-t) = h(t)$ pour tout $t \in\,]\,0\,;1\,[$, la somme de droite vaut

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{2n+1-k}{2n+1}\right)\\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{j}{2n+1}\right) \qquad (j = 2n+1-k)\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la première partie de la question,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la question 5, on obtient finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{1} h(t)\,\mathrm{d}t}$$

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} h\,(k/n)$. D'après les questions 6 et 7,

$$\mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme les sous-suites des termes pairs et impairs convergent vers la même limite, on en déduit que

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit, $\boxed{h \in \mathcal{D}_{0,1}}$

9 Au vu du résultat à obtenir, il est raisonnable d'effectuer un changement de variable faisant intervenir une fonction trigonométrique. Comme de plus, pour tout $t \in \,]\,0\,;1\,[$,

$$h(1-t) = h(t)$$

on cherche à reproduire cette symétrie par rapport au point $1/2$. On peut donc essayer les changements de variable

$$t = \frac{1}{2}(1+\sin(x)) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{1}{2}(1+\cos(x))$$

Des calculs au brouillon montrent que les deux permettent d'aboutir au résultat.

Effectuons le changement de variable $x = \operatorname{Arcsin}(2t-1)$ dans l'intégrale. Comme pour tout $t \in \,]\,0\,;1\,[$, on a $2t-1 \in \,]\,0\,;1\,[$, la nouvelle variable x est bien définie. En outre, la fonction $t \mapsto \operatorname{Arcsin}(2t-1)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]\,0\,;1\,[$; le changement de variable est donc licite. Celui-ci s'inverse en

$$t = \frac{1}{2}(1+\sin(x)) \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Le changement de variable donne alors

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{2}\big(1+\sin(x)\big)\times\frac{1}{2}\big(1-\sin(x)\big)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin(x)^2}}$$

Comme, pour tout $x \in \,]-\pi/2\,;\pi/2\,[\,,\ \cos(x) \geqslant 0$, il s'ensuit

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos(x)^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\cos(x)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x = \pi$$

On a obtenu $\boxed{\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \pi}$

10 On a prouvé à la question 3 que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Par conséquent, $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

Autrement dit, $\boxed{\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$

11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{i}{n}\left(1-\dfrac{i}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right)$$

Or, d'après les questions 8 et 9,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \pi$$

Ainsi,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = \pi}$$

> Ce résultat n'étant pas une conséquence de la question 10, le choix des auteurs du sujet de faire commencer cette question par « en déduire » n'est pas judicieux.

12 Soit $\alpha > 0$. Comme la suite

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge d'après la question précédente, elle est bornée. Soit donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \mathrm{M}$$

De la même manière, soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\varepsilon_n| \leqslant \mathrm{K}$. En outre, comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $|\varepsilon_n| < \alpha/(2\mathrm{M})$. Alors, pour tout $n > \mathrm{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}$$

Maintenant, d'une part,

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{n-\mathrm{N}}} = \frac{\mathrm{K}(\mathrm{N}-1)}{\sqrt{n-\mathrm{N}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il existe donc $\mathrm{N}' > \mathrm{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}'$,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

D'autre part, pour tout $n > \mathrm{N}$,

$$\sum_{i=\mathrm{N}}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \frac{\alpha}{2\mathrm{M}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \frac{\alpha}{2\mathrm{M}}\mathrm{M} = \frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}'$,
$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \alpha$$

On a démontré que

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \mathrm{N}' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N}' \qquad \left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}\right| \leqslant \alpha$$

Par définition de la limite, cela prouve que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0}$$

13 Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{1+\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i}+\varepsilon_i\varepsilon_{n_i}}{1+\varepsilon_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$

Cette quantité peut se réécrire

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} + \frac{1}{1+\varepsilon_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} \right)$$

Étudions séparément la convergence de chaque terme.

- D'abord, d'après la question 11,

$$\frac{1}{1+\varepsilon_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$$

d'où
$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Ensuite, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}$$

et la quantité de droite tend vers 0 d'après la question 12. Par encadrement, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour le troisième terme, effectuons le changement d'indice $j = n-i$. Cela donne

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{j(n-j)}}$$

On retrouve le deuxième terme dont on vient de prouver qu'il a une limite nulle.

- Enfin, comme la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, elle est bornée : soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\varepsilon_k| \leqslant \mathrm{K}$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|\ |\varepsilon_{n-i}|}{\sqrt{i(n-i)}} \leqslant \mathrm{K} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il en découle, d'après le théorème d'encadrement,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{n-i}}{\sqrt{i(n-i)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme $1/(1+\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, tout ceci permet de conclure que

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$