CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

2018

4 heures Calculatrices autorisées

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions (parties I et II). Dans la partie III, largement indépendante du reste du problème, on montre le principe du maximum faible pour le laplacien. Dans la partie IV, on établit un lien entre les fonctions harmoniques de deux variables et les fonctions développables en série entière, et on propose la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ dans la partie V.

Notations

— Dans ce préambule et dans les parties I et III, n désigne un entier strictement positif.

— On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

— Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.

— Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a, R)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit

$$D(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| < R\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a,R)}$.

— L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U \quad \Delta f(x) = 0$$

L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est noté $\mathcal{H}(U)$.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A – On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est-à-dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$.

On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \qquad \text{et} \qquad z'' - \lambda z = 0$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

III Principe du maximum faible

Soit U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, connu sous le nom de principe du maximum faible.

Si f est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U, alors

$$\forall x \in U \qquad f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

où ∂U désigne la frontière de U.

III.A – Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$.

Q 21. Montrer que f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{U}$.

On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que, pour tout $x \in U$, $\Delta f(x) > 0$.

Q 22. Montrer que $x_0 \in \partial U$ et en déduire que $\forall x \in U$, $f(x) < \sup\limits_{y \in \partial U} f(y)$.

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in U$, justifier qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, et considérer la fonction φ définie, pour t réel, par $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, où e_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.B – Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$.

Q 23. Montrer que g_ε est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et telle que $\forall x \in U$, $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

Q 24. En déduire que $\forall x \in U$, $f(x) \leqslant \sup\limits_{y \in \partial U} f(y)$.

Q 25. Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur U. Montrer que si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur ∂U, alors f_1 et f_2 sont égales sur U.