

I. FONCTIONS DE LAMBERT

1 Appliquons le théorème de la bijection monotone à f sur l'intervalle $[-1; +\infty[$. C'est une application dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$, car produit de fonctions dérivables. Pour tout réel $x > -1$,

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de l'intervalle $[-1; +\infty[$ sur son intervalle image. Comme

$$f(-1) = -e^{-1} \quad \text{et} \quad f(x) = xe^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et que f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, l'intervalle image est $[-e^{-1}; +\infty[$. On a montré

L'application f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ sur $[-e^{-1}; +\infty[$.

Le théorème de la bijection monotone fournit deux autres résultats : la continuité et la croissance stricte de la fonction réciproque sur $[-e^{-1}; +\infty[$. Ils seront utilisés aux questions 2 et 4 et devront être justifiés au moment de la réponse à ces questions.

2 Une conséquence directe de la mise en œuvre du théorème de la bijection monotone à la question précédente est que

La fonction W est continue sur l'intervalle $[-e^{-1}; +\infty[$.

Par ailleurs, l'application f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et puisque sa dérivée ne s'annule pas sur $]-1; +\infty[$,

La fonction W est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-e^{-1}; +\infty[$.

3 Évaluons l'identité $W \circ f = \text{id}$ en 0. Puisque $f(0) = 0$, il vient

$$W(0) = 0$$

D'après la question précédente, W est dérivable en $0 \in]-e^{-1}; +\infty[$ et d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques

$$W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = 1$$

4 Pour tout $x \in [-e^{-1}; +\infty[$, on a la relation

$$x = f(W(x)) = W(x)e^{W(x)} \tag{1}$$

La fonction W est continue en 0 et $W(0) = 0$, d'où $e^{W(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ et par quotient d'équivalents, on obtient

$$W(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

On aurait aussi pu appliquer le théorème de Taylor-Young à la fonction W en 0. Puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle admet un développement limité à tout ordre, en particulier à l'ordre 1 :

$$W(x) = W(0) + W'(0)(x - 0) + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

ce qui fournit l'équivalent recherché.

Déterminons à présent un équivalent de $W(x)$ en $+\infty$. Soit un réel $x > 0$, la relation (1) justifie $W(x) > 0$. Appliquons la fonction $\ln$:

$$\ln(x) = \ln(W(x)e^{W(x)}) = \ln(W(x)) + W(x) \quad (2)$$

Comme la fonction W est strictement croissante et non bornée, elle tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. On en déduit par croissances comparées

$$\frac{\ln(W(x))}{W(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

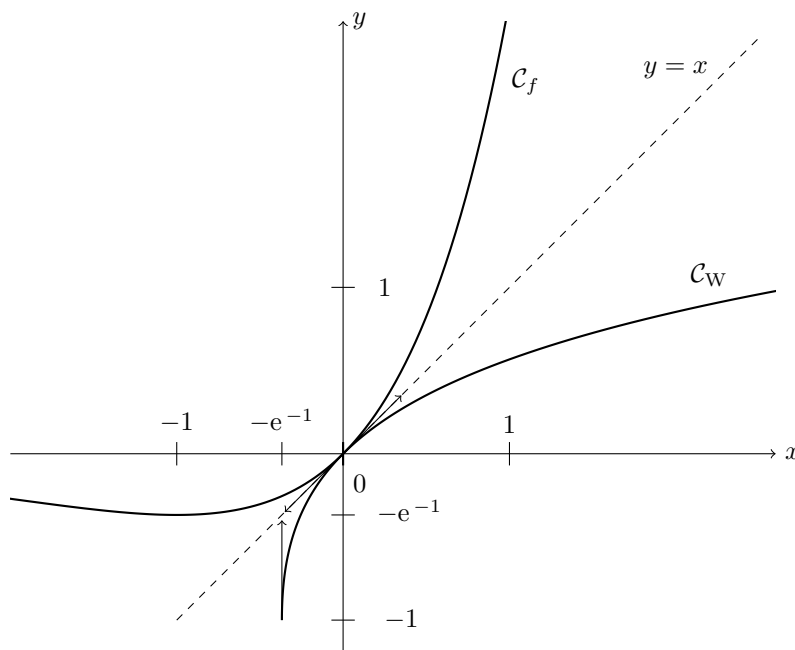
donc $\ln(W(x))$ est négligeable devant $W(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Finalement, d'après (2) :

$$W(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

5 Les fonctions f et W sont dérivables en 0 et prennent la même valeur en 0, ainsi que leurs dérivées d'après la question 3. Leurs courbes représentatives possèdent donc une tangente commune au point d'abscisse $x = 0$, dont l'équation est :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = W(0) + W'(0)(x - 0) = x$$

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ ont comme tangente commune la droite d'équation $y = x$, au point d'abscisse 0.



Les fonctions étant réciproques l'une de l'autre, les courbes $\mathcal{C}_W$ et $\mathcal{C}_f$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Le symétrique du point de $\mathcal{C}_W$ d'abscisse $-e^{-1}$ est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $W(-e^{-1}) = -1$. Comme la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = -e^{-1}$, par symétrie axiale, $\mathcal{C}_W$ possède une tangente verticale au point d'abscisse $-e^{-1}$.

La courbe $\mathcal{C}_W$ a pour tangente la droite $x = -e^{-1}$ au point d'abscisse $-e^{-1}$.

Le raisonnement précédent, de nature géométrique, suppose qu'il a été établi dans le cours que la symétrie axiale préserve le fait qu'une droite soit la tangente à une courbe, ce qui n'est pas le cas (la notion de tangente est définie à partir de la limite d'un taux d'accroissement). On ne recommandera cependant pas une rédaction plus analytique que celle proposée, compte-tenu de l'objectif de la question, qui reste le tracé des courbes $\mathcal{C}_W$ et $\mathcal{C}_f$.

Une preuve plus dans l'esprit du programme consisterait à étudier le taux d'accroissement de la fonction W en $-e^{-1}$. Prenons un réel $y > -e^{-1}$. Puisque la fonction W est continue sur le segment $[-e^{-1}; y]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $] -e^{-1}; y [$, appliquons-lui l'égalité des accroissements finis sur le segment $[-e^{-1}; y]$. Il existe un réel $c_y \in] -e^{-1}; y [$ tel que

$$\frac{W(y) - W(-e^{-1})}{y - (-e^{-1})} = W'(c_y) = \frac{1}{f'(W(c_y))}$$

Ceci étant vrai pour tout réel $y \in] -e^{-1}; +\infty [$, il vient par théorème d'encadrement :

$$c_y \xrightarrow{y \rightarrow -e^{-1}} -e^{-1}$$

La continuité de W en $-e^{-1}$ et celle de f' en -1 justifient les limites :

$$W(y) \xrightarrow{y \rightarrow -e^{-1}} -1^+ \quad \text{et} \quad f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 0^+$$

Par composition et quotient de limites,

$$\frac{W(y) - W(-e^{-1})}{y - (-e^{-1})} \xrightarrow{y \rightarrow -e^{-1}} +\infty$$

Le taux d'accroissement de la fonction W en $-e^{-1}$ a pour limite $+\infty$, ce qui prouve l'existence d'une tangente verticale.

6 Soit α un réel. La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur l'intervalle $]0; 1]$ et d'après un résultat de la question 4

$$x^\alpha W(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^{\alpha+1}$$

Par le critère de comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction est intégrable si et seulement si $\alpha + 1 > -1$, c'est-à-dire

La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha > -2$.

7 Considérons à nouveau un réel α . La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Utilisons la question 4 pour écrire le produit d'équivalents

$$x^\alpha W(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha \ln(x)$$

Distinguons deux cas :

- Si $\alpha \geq -1$, alors pour tout réel $x \geq e$, $x^\alpha \ln(x) \geq x^\alpha$. Par critère de comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est équivalente à une fonction non intégrable quand $x \rightarrow +\infty$. Elle n'est donc pas intégrable.
- Si $\alpha < -1$, on écrit pour tout réel $x \geq 1$:

$$x^\alpha \ln(x) = x^{(-1+\alpha)/2} x^{(\alpha+1)/2} \ln(x)$$

Puisque $\alpha + 1 < 0$, par croissances comparées,

$$x^{(\alpha+1)/2} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où} \quad x^\alpha \ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty} (x^{(-1+\alpha)/2})$$

Or $(\alpha-1)/2 < -1$, la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ est alors intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison aux intégrales de Riemann. La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$, équivalente à une fonction intégrable quand $x \rightarrow +\infty$, est donc intégrable.

En conclusion

La fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

8 La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; -1]$ d'après l'expression de f' établie à la question 1. Appliquons le théorème de la bijection monotone à f sur cet intervalle. Comme f est de limite nulle en $-\infty$, par croissances comparées, l'intervalle image est

$$\left[f(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] = \left[-e^{-1}; 0 \right[$$

Par conséquent,

L'application f établit une bijection de $] -\infty; -1]$ vers $\left[-e^{-1}; 0 \right[$.

9 Résolvons l'équation séparément sur $] -\infty; -1[$ puis sur $[-1; +\infty[$. Soient deux réels m et x .

- Sur l'intervalle $] -\infty; -1[$, on a les équivalences

$$xe^x = m \iff f(x) = m \iff x = V(m)$$

L'équation (I.1) admet une solution si et seulement si $V(m) < -1$, c'est-à-dire si et seulement si $m \in \left] -e^{-1}; 0 \right[$, comme V est strictement décroissante. Cette solution est alors unique, égale à $V(m)$.

- Sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, on a les équivalences

$$xe^x = m \iff f(x) = m \iff x = W(m)$$

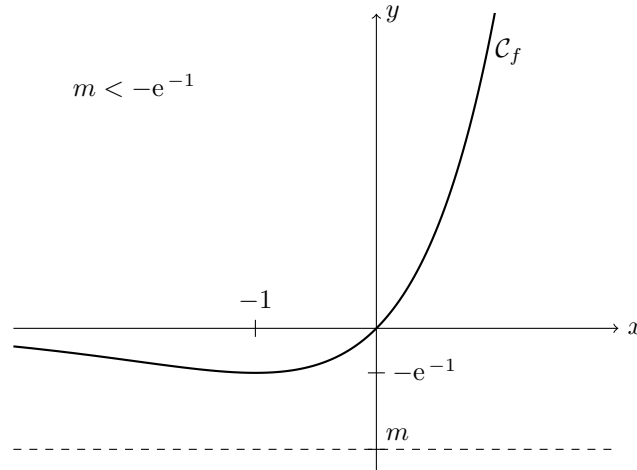
L'équation (I.1) admet une solution si et seulement si $W(m) \geq -1$, c'est-à-dire si et seulement si $m \in \left[-e^{-1}; +\infty \right[$, puisque W est strictement croissante. Elle est alors unique, égale à $W(m)$.

En résumé :

- si $m \in \left] -\infty; -e^{-1} \right[$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $m = -e^{-1}$, l'équation a pour unique solution -1 ;
- si $m \in \left] -e^{-1}; 0 \right[$, l'équation a deux solutions : $V(m)$ et $W(m)$;
- si $m \in \left[0; +\infty \right[$, l'équation a pour unique solution $W(m)$.

10 Soit un réel m . Procédons par disjonction de cas suivant la valeur de m :

- Si $m < -e^{-1}$, d'après les variations de f , l'inéquation (I.2) n'a pas de solution.



- Si $m = -e^{-1}$, les variations de la fonction f montrent qu'elle atteint son minimum global $-e^{-1}$ uniquement en -1 . L'inéquation (I.2) a donc pour unique solution -1 .
- Si $m \in]-e^{-1}; 0[$, résolvons l'inéquation sur l'intervalle $] -\infty; -1[$ puis sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ comme à la question 9.
 - Pour tout $x \in] -\infty; -1[$, on a les équivalences

$$xe^x \leq m \iff f(x) \leq m \iff x \geq V(m)$$

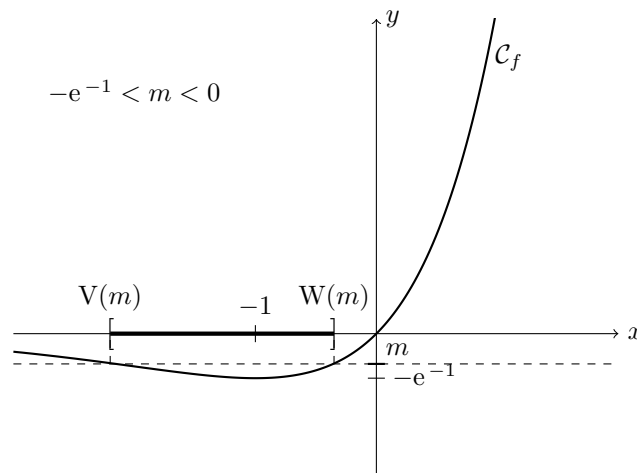
car V est décroissante. Les solutions sur l'intervalle $] -\infty; -1[$ constituent donc l'intervalle $] -\infty; -1[\cap [V(m); +\infty[= [V(m); -1[$.

- Pour tout $x \in [-1; +\infty[$, on a les équivalences

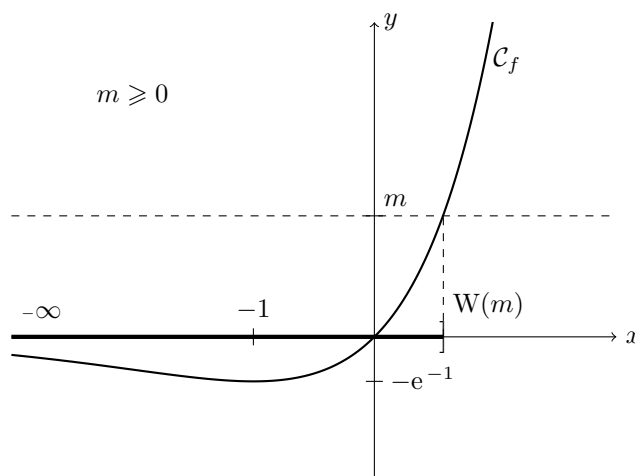
$$xe^x \leq m \iff f(x) \leq m \iff x \leq W(m)$$

car W est croissante. Les solutions sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ forment donc l'intervalle $[-1; +\infty[\cap [-\infty; W(m)] = [-1; W(m)]$.

On en déduit que les solutions de l'inéquation (I.2) correspondent à l'union d'intervalles $[V(m); -1[\cup [-1; W(m)] = [V(m); W(m)]$.



- Si $m \geq 0$, l'intervalle $]-\infty; -1[$ est inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation puisque la fonction f est à valeurs strictement négatives sur cet intervalle. Sur $[-1; +\infty[$, comme vu au point précédent, les solutions forment l'intervalle $[-1; W(m)]$. On en déduit que les solutions de l'inéquation (I.2) forment l'intervalle $]-\infty; -1[\cup [-1; W(m)] =]-\infty; W(m)]$.



En conclusion,

- si $m < -e^{-1}$, l'inéquation n'a pas de solution ;
- si $m = -e^{-1}$, l'inéquation a pour solution -1 ;
- si $m \in]-e^{-1}; 0[$, l'inéquation a pour solutions $[V(m); W(m)]$;
- si $m \in [0; +\infty[$, l'inéquation a pour solutions $]-\infty; W(m)]$.

11 Notons que si x est un réel et si a et b sont deux réels non nuls alors :

$$e^{ax} + bx = 0 \iff 1 + bxe^{-ax} = 0 \iff axe^{-ax} = -\frac{a}{b} \iff f(-ax) = \frac{a}{b}$$

Par suite, x est solution de l'équation (I.3) si et seulement si $-ax$ est solution de l'équation (I.1) avec le paramètre $m = a/b$. Reprenons alors les conclusions de la question 9 avec ce paramètre :

- si $m \in]-\infty; -e^{-1}[$, l'équation n'a pas de solution ;
- si $m = -e^{-1}$, l'équation admet pour solution $1/a$;
- si $m \in]-e^{-1}; 0[$, l'équation admet deux solutions : $-V(m)/a$ et $-W(m)/a$;
- si $m \in [0; +\infty[$, l'équation a pour unique solution $-W(a/b)/a$.

IV. APPROXIMATION DE W

35 Soit x un réel positif. Multiplions les deux membres de l'expression (1) vue à la question 4 par $\exp(-W(x))$:

$$x \exp(-W(x)) = W(x)$$

En utilisant deux fois cette identité on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_x(W(x)) &= x \exp(-x \exp(-W(x))) \\ &= x \exp(-W(x))\end{aligned}$$

d'où

$$\phi_x(W(x)) = W(x)$$

Pour tout réel positif x , $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x .

36 Soit x un réel positif. La fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

Pour tout réel positif x , la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée en rappelant que, si u est une fonction dérivable, la fonction $\exp u$ est dérivable de dérivée $u' \exp u$. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_x'(t) = x((-1) \times (-x \exp(-t)) \exp(-x \exp(-t))) = x^2 \exp(-t - x \exp(-t))$$

On en déduit $\phi_x' \geq 0$. Si $x = 0$, $\phi_x' = 0$ et le résultat est établi. Supposons donc $x > 0$ et dérivons à nouveau puisque ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_x''(t) = x^2(-1 + x \exp(-t)) \exp(-t - x \exp(-t))$$

Cette expression est du signe de $-1 + x \exp(-t)$, c'est-à-dire strictement positif pour $t < \ln(x)$ et strictement négatif pour $t > \ln(x)$. On en déduit que ϕ_x' présente un maximum global en $t = \ln(x)$ égal à

$$\phi_x'(\ln(x)) = x^2 \exp(-\ln(x) - 1) = \frac{x}{e}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \phi_x'(t) \leq \frac{x}{e}$$

37 Montrons le résultat par récurrence sur n en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x \in [0; e] \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \gg$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car pour tout $x \in [0; e]$, $w_0(x) = 1$ et $\left(\frac{x}{e}\right)^0 = 1$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et prenons $x \in [0; e]$.
 - Si $w_n(x) = W(x)$, d'après la question 35

$$w_{n+1}(x) = \phi_x(W(x)) = W(x)$$

$$\text{d'où} \quad |w_{n+1}(x) - W(x)| = 0 \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{n+1} |1 - W(x)|$$

- Sinon, la fonction ϕ_x étant dérivable sur $\mathbb{R}$, appliquons-lui l'inégalité des accroissements finis sur le segment d'extrémités $W(x)$ et $w_n(x)$. Avec la majoration obtenue à la question 36, on a

$$|\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leq \frac{x}{e} |w_n(x) - W(x)|$$

d'où, par $\mathcal{P}(n)$ et parce que $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x ,

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| \leq \frac{x}{e} \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|$$

On a établi que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion :

$$\forall x \in [0; e] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|$$

38 Soit $a \in]0; e[$. L'application $|1 - W|$ est continue sur le segment $[0; a]$, donc bornée. Notons M un majorant sur cet intervalle. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question précédente,

$$\forall x \in [0; a] \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n M$$

La fonction $|w_n - W|$ possède donc une borne supérieure sur le segment $[0; a]$. Notons-la $\|w_n - W\|_\infty$. Puisque $0 < a/e < 1$, il vient

$$\|w_n - W\|_\infty \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ce qui montre la convergence normale de la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ vers W . Ainsi,

$$\text{Pour tout réel } a \in]0; e[, \text{ la suite de fonctions } (w_n)_{n \geq 0} \text{ converge uniformément sur } [0; a] \text{ vers la fonction } W.$$

39 Montrons la convergence uniforme de la suite de fonctions $(w_n)_{n \geq 0}$ vers W sur $[0; e]$. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de la fonction W établie à la question 2, exprimée en e , assure l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [e - \eta; e] \quad |W(e) - W(x)| = |1 - W(x)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in [e - \eta; e]$. D'après la question 37, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leq \varepsilon$$

Utilisons à présent le résultat de la question 38 avec $a = e - \eta$. La convergence uniforme de $(w_n)_{n \geq 0}$ vers W sur $[0; a]$ assure l'existence d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0; e - \eta]$ on a $|w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon$. On a finalement montré

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [0; e] \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve que

$$\text{La suite de fonctions } (w_n)_{n \geq 0} \text{ converge uniformément sur } [0; e] \text{ vers } W.$$