

Centrale – PC

Algèbre

1342. a) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.

b) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

1343. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$. On pose $A_0 = 1$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $A_k = \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}$.

a) Montrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.

c) En déduire, pour j et k éléments de $\{0, 1, \dots, n\}$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$.

d) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k$. Montrer que, pour

tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

e) En déduire que $\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3$, $(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x(x - ka)^{k-1} (y + ka)^{n-k}$.

1344. Soient $n \geq 2$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\Omega_n = (\omega^{(\ell-1)(m-1)})_{1 \leq \ell, m \leq n}$.

a) Exprimer $\det(\Omega_n)$ à l'aide des ω^k sous forme de produit.

b) Calculer $\Omega_n \overline{\Omega_n}$. En déduire $|\det(\Omega_n)|$.

c) On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $\sum_{1 \leq \ell < k \leq n} (k + \ell)$.

d) Calculer $\det(\Omega_n)$.

1345. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit p un projecteur de E de rang $r \leq n - 1$. Soit $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(f) = \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$.

a) Calculer Φ^2 et Φ^3 .

b) Montrer que Φ est diagonalisable.

c) Trouver les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de Φ .

1346. On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f)$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de E .

b) Déterminer le noyau et l'image de Φ .

c) Déterminer les éléments propres de Φ .

1347. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1348. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

- a) Montrer que, si $k \in \mathbb{N}$ est impair, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^k) = A$.
- b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^2) = A$.

1349. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable ayant n valeurs propres distinctes. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

- a) Montrer que g est diagonalisable.
- b) Montrer qu'il existe $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
- c) Trouver $\dim(\mathcal{C}(f))$ où $\mathcal{C}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E), f \circ h = h \circ f\}$.

1350. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

- a) La matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?
- b) Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

1351. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit les applications linéaires

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}, \Delta_k : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto D^k(P)(0) \end{cases} \quad \text{ainsi que les} \\ \text{polynômes } H_0 = 1 \text{ et } H_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

- a) L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?
- b) Montrer que $(\Delta_0, \dots, \Delta_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

1352. Soient $n \geq 2$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- a) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E . Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u possède n valeurs propres distinctes.
- b) On suppose que u possède n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .
- c) Supposons que les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$ et E . Montrer que, pour tout x non nul, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

1353. Si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- c) Montrer que le sous-espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1354. Soit E un espace euclidien de dimension finie $n > 2$. Soit a un vecteur de E de norme 1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = x + k \langle a, x \rangle a$.

- a) Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable.
- b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathcal{S}(E)$ tel que $g^2 = f$.

1355. Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une similitude s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

- a) Montrer que f est une similitude si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f = \lambda g$.
- b) Montrer que f est une similitude si et seulement si f préserve l'orthogonalité : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

1356. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

- a) Montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A^T\| = \|A\|$, $\|A^T A\| = \|A A^T\|$ et $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.
- b) Soient A et B deux matrices orthogonales telles que $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ est orthogonale. Montrer que $A = B$.

1357. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur E .

- a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \ell(x) = \langle a, x \rangle$.
- b) Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$. Déterminer $\text{Ker } f$.
- c) Montrer que $\text{Ker}(\ell)$ est un sous-espace propre de f .
- d) Montrer que f est diagonalisable.
- e) Montrer que f est autoadjoint. Commenter.

1358. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

- a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.
- b) Montrer que A est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où C est une matrice carrée inversible de taille paire.

1359. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

- a) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = 2XP' - P''$. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
- c) Déterminer les valeurs propres de f .

1360. Soit $n \geq 2$. On pose $A = (\min\{i, j\})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Trouver une matrice B triangulaire supérieure telle que $A = B^T B$.
- b) Montrer que A est inversible.
- c) Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

1361. Soit E un espace euclidien.

a) Soit u un endomorphisme autoadjoint positif. Soit $x \in E$. Montrer que $\langle x, u(x) \rangle = 0$ si et seulement si $x \in \text{Ker}(u)$.

b) Soient a et b deux endomorphismes autoadjoints positifs.

i) Montrer qu'il existe h autoadjoint positif tel que $h^2 = b$.

ii) On pose $f = ab$ et $g = hah$. Montrer que g est diagonalisable.

iii) En remarquant que $f = (ah)h$ montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont même dimension. Qu'en conclure sur f ?

1362. On veut montrer le théorème spectral. Soit $n \geq 2$.

a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ irréductible et unitaire. Montrer que $P(S)$ est inversible (sans utiliser le théorème spectral).

b) En déduire une démonstration du théorème spectral.

Analyse

1363. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice T est-elle diagonalisable?

b) La matrice T est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables?

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq c |\text{Im}(z)|$.

d) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$. Montrer que A est trigonalisable.

1364. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum u_n^{1 - \frac{1}{\ln(\ln(n))}}$?

1365. a) Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

b) On pose $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

c) Étudier la convergence de la série $\sum \ln \left(\tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \right)$.

1366. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $[0, 1]$ tels que :

$$\forall k \in [1, n], \int_0^{a_k} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt.$$

b) Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

c) On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est continue et que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est divergente. Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $v_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \int_{v_n}^{v_{n+1}} f(t) dt$.

d) Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.

1367. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, strictement croissante, concave, telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. On considère $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(f(t))}{t} dt$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(f(k))}{k}$.

a) On prend $f = \text{id}_{\mathbb{R}^{+*}}$. Montrer par une intégration par parties que I converge.

b) On prend $f : t \mapsto 10 \ln(t)$. Trouver une primitive de $u \mapsto \frac{\sin(\ln(u))}{u}$ et en déduire la nature de I .

c) On prend $f : t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α les conditions de l'énoncé sont-elles respectées ? Déterminer alors la nature de I sous ces conditions.

d) Tracer le graphe de $n \mapsto S_n$ pour $n \in \llbracket 1, 1000 \rrbracket$ lorsque $f(t) = t^\alpha$ avec $\alpha = 0,5$ puis $\alpha = 0,8$.

e) Idem pour $f(t) = 10 \ln(t)$.

f) Établir une conjecture.

On suppose maintenant que $f(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ avec $\beta > 0$.

g) Quelles fonctions ont cette propriété parmi celles déjà rencontrées dans l'énoncé ?

h) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $t \in [n, n+1]$, $\left| \frac{\sin(f(t))}{t} - \frac{\sin(f(n))}{n} \right| \leq \frac{f'(n)}{n} + \frac{1}{n^2}$.

i) Démontrer la conjecture.

1368. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel.

a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f' \in E$.

b) On suppose de plus que $f(0) = 0$.

Montrer que $\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f''(t)^2 dt \right)$ et préciser le cas d'égalité.

1369. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $]0, 1]$. Soit ℓ un réel strictement positif.

a) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$. Si f admet une limite en $+\infty$, quelle est cette limite ?

- b) Trouver toutes les fonctions f telles que $\forall x > 0, f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$.
- c) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

1370. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $x > 0$, on ait $f''(x) > 0$ et $f(x+1) = xf(x)$.

a) Montrer que f' s'annule sur $]1, 2[$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser son signe.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

d) Nature de $I = \int_1^{+\infty} f(t) dt$, $J = \int_0^1 f(t) dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$?

1371. Soient $u_0 \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \in [0, 1] \mapsto 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (u_n) .

1372. a) Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

Justifier que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}x(1-x)$.

c) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Montrer que $B_{n+1}(f)'(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

En déduire que, si f est croissante (resp. convexe), $B_n(f)$ l'est aussi.

d) On pose $S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Montrer que $S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire

que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

e) Montrer que, si f est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(f)(x) = f(x)$.

1373. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Établir une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.

c) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

1374. a) À l'aide d'une équation différentielle, développer en série entière $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Quel est le rayon de convergence R de cette série entière? Étudier la convergence de la série entière en $x = R$ et en $x = -R$.

1375. a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

b) Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ converge. On note $g(x)$ sa somme.

c) Trouver un équivalent de $g(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

d) Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continue, décroissante, intégrable. Étudier la convergence de $S : t \mapsto \sum_{n \geq 1} h(nt)$. Donner un équivalent de $S(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$.

1376. Soit D_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

a) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ et $g : x \mapsto f(x) e^x$. Calculer $g(x)$.

d) Écrire D_n sous la forme d'une somme et en déduire un équivalent de D_n .

1377. On note a_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose $a_0 = 1$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. En déduire que $a_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est ≥ 1 .

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

i) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .

ii) Résoudre l'équation différentielle et déterminer f .

iii) En déduire une formule pour exprimer a_n en fonction de n .

1378. a) Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On pose $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b) Montrer que F est bien définie sur $] -1, 1 [$.

c) On suppose que $\sum a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \ell$.

d) Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement que $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée?

1379. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(nx)} = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(x)}$ et calculer leur valeur.

b) Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(x)}{1 + \cos^2(nx)} dx$.

1380. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}$

a) Déterminer la limite de la suite (I_n) , notée ℓ . Donner un équivalent de $I_n - \ell$.

b) Justifier l'existence de $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ et montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de I_n .

1381. Soient $a, b > 0$.

a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + nb)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt$.

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} dt$.

c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 1}$.

1382. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

a) En utilisant la série de fonctions $\sum f_n$, calculer si elle existe la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

b) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-x}) dx$.

c) Équivalent de $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx}) dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1383. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt$.

a) Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) On donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $f(0)$.

c) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles

1384. On pose $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{it}}{x^2 + t^2} dt$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{u^2 + 1} du$. En déduire la limite de f en 0.

- c) Calculer le laplacien de $(x, t) \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$.
- d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
- e) Donner une expression simple de f .

1385. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} dt$.

- a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- b) Sur quel ensemble f est-elle continue ?
- c) Sur quel ensemble f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer f' .

1386. On pose $J_n : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$

- a) Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^2$.
- b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par J_n
- c) Déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.

1387. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{ixt} e^{-t} dt$.

- a) Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer I en fonction de I_0 et de fonctions usuelles.
- b) Trouver un équivalent de I en $\pm\infty$. Exprimer le développement asymptotique de I à l'ordre 2.

1388. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

- a) Donner le domaine de définition de f . Montrer que f est continue sur ce domaine.
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- c) Calculer $f(x)$.

1389. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt$.

- a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
- c) Discuter la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$.

1390. Soit E l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$. Soit B l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. On munit B de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Si $f \in E$, on définit $\hat{f}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$.

- a) Montrer que l'application $\Phi : E \rightarrow B, f \mapsto \hat{f}$ est bien définie et qu'elle est continue.

b) Pour tout $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$. Montrer que $\hat{f}_\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On donne $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Donner une expression de $\hat{f}_\alpha(t)$ pour tout réel t .

1391. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. Soit $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2, P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$. Montrer que Σ admet un minimum et le déterminer.

1392. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ∇f .

b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et exprimer le point x^* où ce minimum est atteint.

1393. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ [resp. $\overline{B}(a, r)$ et $\partial B(a, r)$] la boule ouverte de centre a et de rayon r [resp. la boule fermée et la frontière de la boule]. Soit $f : \overline{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{B}(a, r)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(a, r)$. Pour $x \in B(a, r)$, on définit $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$.

a) On suppose $\Delta f > 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que f atteint un maximum et que celui-ci ne peut pas être atteint en un point de $B(a, r)$.

b) On suppose $\Delta f \geq 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que $\sup_{x \in \overline{B}(a, r)} f(x) = \sup_{x \in \partial B(a, r)} f(x)$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$, considérer $\tilde{f}_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x - a\|^2$.

Probabilités

1394. Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , on pioche n boules avec $n \leq N$ (en une seule fois). On note X la variable aléatoire qui donne le maximum des numéros des boules tirées.

a) Donner la loi de X .

b) Montrer que $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

c) En déduire l'espérance de X .

d) Déterminer la variance de X .

1395. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

a) Exprimer la loi de Y en fonction de celle de X . Montrer que Y et $X - Y$ suivent la même loi.

b) On pose $Z = Y + 1$ et on suppose que Z suit la loi géométrique de paramètre p .

i) Déterminer la loi de X .

- ii) Montrer que les variables aléatoires Y et $X - Y$ sont indépendantes.
 c) Réciproquement, montrer que si les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes alors $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique.

1396. Une particule, initialement placée en 0, se déplace à chaque instant de manière équiprobable d'une unité vers la gauche ou vers la droite, indépendamment des déplacements précédents. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de la particule à l'instant n .

- a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
 b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{-k, \dots, k\}$. Exprimer $\mathbf{P}(X_{2k} = 2\ell)$.

1397. Un chocolatier met des images dans ses tablettes de chocolat. Il y a N images différentes et, à chaque achat, on obtient uniformément et indépendamment une des images. Soit X_k le nombre de tablettes achetées pour obtenir k images différentes.

- a) Quelle est la loi de $X_{k+1} - X_k$? Calculer $\mathbf{E}(X_k)$.
 b) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(X_N)$ quand N tend vers l'infini.
 c) Trouver de même un équivalent de $\sigma(X_N)$.

1398. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- a) Calculer la loi de $|S_{2n}|$.

b) Montrer que $\mathbf{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\ell=n+1}^{2n} \binom{2n}{\ell}$.

c) Montrer que : $\sum_{\ell=n+1}^{2n} \binom{2n}{\ell} = 2^{2n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$. Calculer $\sum_{\ell=n+1}^{2n} \ell \binom{2n}{\ell}$.

1399. On considère une matrice aléatoire $A_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $D_n = \det(A_n)$.

- a) Déterminer $\mathbf{E}(D_n)$.
 b) Montrer que $\mathbf{V}(D_n) = n!$ par récurrence sur n .