

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

1.1 Définitions

Définition 1

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0; +\infty]$. On appelle espérance de X la quantité appartenant à $[0; +\infty]$ définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

avec par convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = +\infty) = 0$.

Définition 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes. On dit que X est d'espérance finie si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est appelée l'espérance de X .

Remarque 1

- Lorsqu'elle existe, $E(X)$ ne dépend que de la loi X . L'absolue convergence est indispensable pour ne pas dépendre du choix de l'énumération de l'ensemble $X(\Omega)$.
- Si X est bornée (en particulier si $X(\Omega)$ est fini), alors elle admet une espérance.
- Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée. Si X est une variable aléatoire discrète quelconque, alors $X - E(X)$ est une variable centrée (en vertu de la linéarité de l'espérance, à venir).

Proposition 1

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

Exemple 1 (Lois uniforme, de Bernoulli, binomiale (PCSI))

- Si X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$, alors

$$E(X) = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

- Si X suit une binomiale de paramètres (n, p) , alors $E(X) = np$.

Exemple 2 (Lois géométrique, de Poisson (PC))

- Si X suit une loi géométrique de paramètre $p > 0$, alors X admet une espérance et $E(X) = 1/p$.
- Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors X admet une espérance et $E(X) = \lambda$.

1.2 Propriétés

Théorème 1 (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète et f une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs réelles ou complexes. Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas là,

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Remarque 2

La formule s'applique également lorsque X est un couple de variables aléatoires, ou plus généralement un n -uplet de variables aléatoires.

Corollaire 1 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes qui admettent une espérance. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il en est de même de $\lambda X + Y$ et

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$$

Proposition 2 (Positivité, croissance)

- Si X est positive et admet une espérance, alors $E(X)$ est positive et $E(X) = 0$ si et seulement si $(X = 0)$ est presque sûr.
- Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie et $E(X) \leq E(Y)$.

Exemple 3

On reprend l'expérience des tirages avec remise dans une urne contenant des boules noires et des boules blanches, où X_r est le rang de la r -ième boule blanche tirée. Alors pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, X_r a pour espérance r/p où p est la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne.

Théorème 2

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

2 Variance, écart-type et covariance d'une variable aléatoire discrète réelle

2.1 Variance

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire discrète. Si X^2 est d'espérance finie, alors X est également d'espérance finie.

Remarque 3

Plus généralement, s'il existe un entier $p \geq 2$ tel que X^p ait une espérance finie, on dit que X admet un moment d'ordre p . Une démonstration similaire montre que si X admet un moment d'ordre p , alors elle admet un moment d'ordre k pour tout $k \leq p$.

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finies, alors $X \cdot Y$ l'est aussi et

$$E(X \cdot Y)^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$$

Remarque 4

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que $aX + bY$ est presque sûrement nulle.

Définition 3

Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que X^2 soit d'espérance finie. On appelle variance de X le réel positif

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

et écart-type de X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Proposition 5

Si X est telle que X^2 admet une espérance, alors pour tout réels a et b , il en est de même de $aX + b$ et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarque 5

Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que X^2 est d'espérance finie.

- Si $\sigma(X) = 0$, alors $(X = E(X))$ est presque sûr.
- Si $\sigma(X) \neq 0$, alors $(X - E(X))/\sigma(X)$ est centrée et réduite (c'est-à-dire de variance égale à 1).

Exemple 4

- Si X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , sa variance est égale à $n \cdot p \cdot q$.
- Si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors X^2 est d'espérance finie et $V(X) = q/p^2$.
- Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors X^2 est d'espérance finie et $V(X) = \lambda$.

2.2 Covariance**Définition 4**

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles. Si X^2 et Y^2 admettent une espérance, on appelle covariance de X et Y le réel

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \end{aligned}$$

Remarque 6

Pour $X = Y$, on a $\text{cov}(X, X) = V(X)$.

Proposition 6

Si X et Y sont indépendantes et si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Remarque 7

La réciproque est fausse. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Posons $Z = X - 2Y$ et $W = 4X + 2Y$. Alors, $\text{cov}(Z, W) = 0$ à nouveau mais cette fois, Z et W ne sont pas indépendants car

$$P(Z = 0, W = 0) = (1 - p)^2 \quad \text{et} \quad P(Z = 0) \cdot P(W = 0) = (1 - p)^4$$

Proposition 7

Si X et Y ont des moments d'ordre 2, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances.

Corollaire 2

Si $X_1, \dots, X_n$ admettent des moments d'ordre 2 et sont 2 à 2 indépendantes, alors

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$$

3 Fonction génératrice d'une VA entière

Définition 5

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X l'application

$$G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$$

Proposition 8

L'application G_X est définie et continue au moins sur $[-1; 1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur $] -1; 1[$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

En particulier, la loi d'une variable aléatoire à valeurs entières est entièrement caractérisée par sa fonction génératrice.

Exemple 5 (Loi binomiale (PCSI))

Si X suit une binomiale de paramètres (n, p) , alors $G_X : t \longmapsto (pt + q)^n$.

Exemple 6 (Lois géométrique, de Poisson (PC))

- Si X suit une loi géométrique de paramètre $p > 0$, alors $G_X : t \longmapsto \frac{pt}{1 - qt}$.
- Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $G_X : t \longmapsto \exp(\lambda(t - 1))$.

Proposition 9

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- X a une espérance finie si et seulement si g_X est dérivable en 1, et alors

$$E(X) = G'_X(1)$$

- X^2 est d'espérance finie si et seulement si la fonction génératrice G_X a une dérivée seconde en 1 et alors

$$G''_X(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X = k) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

d'où

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Proposition 10

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs entières et indépendantes. Alors, pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$G_{X+Y}(x) = G_X(x) \cdot G_Y(x)$$

Exercice 1 (Formule de Wald)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d de variables aléatoires à valeurs entières définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur le même espace probabilisé, indépendante des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On pose $Z = X_1 + \dots + X_N$ soit

$$Z : \omega \longmapsto X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

- Démontrer que $G_Z = G_N \circ G_{X_1}$.
- En déduire que si X_1 et N admettent une espérance, il en est de même de Z et exprimer $E(Z)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$.

4 Inégalités probabilistes

Proposition 11 (Inégalité de Markov)

Si X admet une espérance, alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$P(|X| > \epsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\epsilon}$$

Corollaire 3 (Inégalité de Bienaimé-Tchebychev)

Si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Remarque 8

- Plus $V(X)$ est petit, plus X est « proche » de sa moyenne.
- Ce résultat permet de retrouver le fait que si $V(X) = 0$, alors $X = E(X)$ est presque sûr.

Théorème 3 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires discrètes de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = \sigma(X_1)$, pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exemple 7

On lance une pièce biaisée une infinité de fois, la probabilité de faire pile valant p (et donc celle de faire face valant $q = 1 - p$). Alors, si l'on note X_n le nombre moyen de pile sur les n premiers lancers, pour tout $\epsilon > 0$,

$$P(|X_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p \cdot q}{n \cdot \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque 9

La loi faible des grands nombres est un exemple de convergence en probabilité. Plus généralement, on dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \quad P(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il s'agit d'une propriété plus faible que la notion de convergence presque sûre, qui affirme cette fois que

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega)\right\}\right) = 1$$

autrement dit, l'ensemble des points pour lesquels $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ est presque sûr. La loi forte des grands nombres permet justement d'établir un tel résultat.