

Écoles Normales Supérieures – PC**Algèbre**

187. ★ a) Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle que 0 et 1 appartiennent à X et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card}(X \cap \llbracket 0, n \rrbracket) = 0$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $\text{Card}(X \cap \llbracket j, j+k \rrbracket) = 2$.
b) Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

188. Soient deux réels a et b . On pose $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + X$. On suppose que les racines de P sont toutes distinctes deux à deux et qu'elles appartiennent à un même cercle du plan complexe. Montrer que $3 < ab < 9$.

189. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = XP'_n$. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines complexes de P_n appartiennent au disque de centre 0 et de rayon λ_n .

190. Soit E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients 0 ou 1 qui sont inversibles. Quel est le nombre maximal de 1 d'un élément de E ?

191. On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) A est monotone, c'est-à-dire A est inversible et A^{-1} positive,
- (ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n, AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.

192. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in E, \operatorname{rg}(A) \leq 1$. Montrer que $\dim(E) \leq n$.

193. Déterminer les $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

194. Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes d'indice $n - 1$.

195. Existe-t-il deux matrices N et P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = 0$, $P^2 = P$, NP est nilpotente et $(NP)^2 \neq 0$?

196. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = 0$. Montrer qu'il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X + MX + XM^2 = M$.

197. On pose $A_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 2A_n - A_n^2$. Déterminer la limite de $(\det(A_n))$ quand $n \rightarrow +\infty$.

198. On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_n & I_{2^n} \\ \hline I_{2^n} & A_n \end{array} \right)$. Montrer que A_n admet $(n + 1)$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ d'ordres respectifs $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

199. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$. Montrer que $M = (\langle X^i, X^j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$ est inversible.

200. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels.

Pour des polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$.

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer qu'il existe une base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, orthonormée pour ce produit scalaire et telle que, pour chaque $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme P_i soit de degré i et à coefficient dominant strictement positif.

c) Déterminer $P_k^{(k)}(a_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

d) On suppose $a_0 = \dots = a_n = a$. Déterminer les polynômes P_k .

201. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists i \in \{1, \dots, k\}, \langle x, f_i \rangle > 0$.

a) Donner un exemple de famille de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette propriété.

a) Montrer que $(f_1, \dots, f_k)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

202. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En notant $(s_1, \dots, s_n)$ les valeurs propres de M , on pose

$$N_p(M) = \left(\sum_{i=1}^n |s_i|^p \right)^{1/p}.$$

a) Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire que N_2 est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $N_1(M) = \sup\{|\text{tr}(MO)|, O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. En déduire que N_1 est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

203. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A sont imaginaires pures.

b) Que dire de $\det(A)$ si n est impair ?

c) On suppose n pair et on considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $\det(A + J) = \det(A)$

204. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ vérifiant $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{0, 1\}$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^T A = kI_n + J$. Montrer que A est inversible.

205. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes possibles de A ?

b) Donner un exemple de matrice A qui vérifie $A^2 = A^T$ et qui possède toutes les valeurs propres possibles trouvées à la question précédente.

206. a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que les assertions sont équivalentes :

(i) S admet k valeurs propres positives (comptées avec multiplicité),

(ii) il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $\dim F = k$, $\dim G = n - k$ et $\forall X \in F, X^T S X \geq 0$ et $\forall Y \in G, Y^T S Y \leq 0$.

b) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^T S P$ et S ont le même nombre de valeurs propres positives.

207. a) Montrer que toute matrice symétrique positive admet une racine carrée.

b) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe S symétrique définie positive telle que $SA = A^T S$.

208. Soit E un espace euclidien. Soit a un endomorphisme autoadjoint de E . Soient $u \in E$ non nul et $V = \text{Vect}\{a^k(u) ; k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Analyse

209. Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que $x, y \in A$ sont connectés si et seulement s'il existe $f \in C^0([0, 1], A)$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

a) Montrer que tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont connectés.

b) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

c) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{x, \|x\| = 1\}$.

d) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{B}_o(i, \varepsilon)$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

210. On considère $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$, où le spectre est pris sur $\mathbb{C}$. L'application f est-elle lipschitzienne ?

211. On pose $a_1 \geq 0$ puis $a_{n+1} = 10^n a_n n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur a_1 la suite (a_n) tend-elle vers 0 ?

212. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$. Donner un équivalent de $f(n)$.

213. Étudier les suites u et v telles que $u_0 = v_0 = 0$ et $u_1 = v_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + cu_{n-1} + dv_{n-1} \\ v_{n+1} = a'u_n + b'v_n + c'u_{n-1} + d'v_{n-1} \end{cases}$$
 avec toutes les constantes réelles.

214. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n, x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$.

a) Pour quelles valeurs de a a-t-on $\forall n, u_n \in [0, 1]$? Que peut-on dire alors de la suite (x_n) ?

b) Montrer que, si $a \in [1, 2]$, alors x_n tend vers $\frac{a-1}{a}$.

c) On suppose que $a \in [2, 3]$ et que (x_n) converge. Quelle est la limite de (x_n) ?

215. Soit $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs ou nuls telle que $p_{i,j} = 0$ si $j > i$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^n p_{n,j} = 1$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) pour chaque $j \in \mathbb{N}$, la suite $(p_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0,

ii) pour toute suite convergente $(s_n)_{n \geq 0}$ de limite S , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n p_{n,j} s_j = S$.

216. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \neq u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$.

a) Montrer que, si u_0 et u_1 sont assez petits, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Sous les hypothèses de a), déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

217. Pour $c \in \mathbb{C}$, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}, (z_n) \text{ est bornée}\}$.

a) Montrer que, si $|c| \leq 1/4$, alors $c \in \mathcal{M}$.

b) Montrer que, si $|c| \geq 3$, alors $c \notin \mathcal{M}$.

c) Discuter de l'ensemble $\mathcal{M} \cap \mathbb{R}$.

218. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles. Soit $S \in \mathbb{R}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$; (ii) la série $\sum b_n$ diverge; (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = S$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \cdots + a_n}{b_0 + \cdots + b_n} = S$.

219. ★ Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?

220. Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$. Pour $\lambda > 0$, on pose $A_\lambda = \{x > 0, g(x) = \lambda x\}$. Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall \lambda \in]0, \mu]$, $A_\lambda \neq \emptyset$.

221. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f + g$ est croissante. Montrer que $f([0, 1])$ est un intervalle.

222. ★ Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t)^2 = f(t\sqrt{2})$.

223. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues. On suppose $f \circ g = g \circ f$ et g croissante. Montrer que f et g admettent un point fixe commun.

224. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ telles que : $\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, f(x) - f(y) \geq f(x)^2(x - y)$.

225. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(7x + 1) = 49f(x)$.

226. Soit $f : t \mapsto \sum_{k=1}^N a_k \sin(2\pi kt)$ où les a_k sont des nombres réels avec $a_N \neq 0$. On note N_j le nombre de racines comptées avec multiplicité (notion qu'on admettra) de $f^{(j)}$ sur $[0, 1]$. Montrer que $(N_j)_{j \geq 0}$ est une suite croissante qui tend vers $2N$.

227. Soit $V = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) ; f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$. Trouver tous les réels α tels que : $\forall f \in V, \exists x \in [0, 1], f(x) + \alpha = f'(x)$.

228. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ et f telle que $f'(t) - f(t) = g(t)$. On pose $a = f(0)$. Montrer qu'il existe une unique valeur a pour laquelle $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

229. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ne prenant pas les valeurs 0 et 1.

On suppose que $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) - 1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

230. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne, $\lambda \in]0, 1[$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = f(x) + \lambda F(x + a)$.

231. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $f_a : x \mapsto f(x + a)$ et $F_f = \text{Vect}(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$.

a) Trouver f telle que F_f est de dimension finie. Préciser la dimension.

- b) Montrer que, si F_f est de dimension finie, alors $F_{f'}$ est aussi de dimension finie.
 c) Trouver les fonctions f telles que $\dim F_f = 1$.
 d) Trouver les fonctions f telles que $\dim F_f = 2$.

232. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$,
 $\lambda(t) = \max_{x \in \mathbb{R}} (|f(x)| \exp(-tx^2))$.

- a) On suppose $f(0) \neq 0$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)$.
 b) On suppose maintenant $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de λ en $+\infty$.
 c) Même question en supposant la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0$.

233. On dit que (x_n) converge au sens de Césaro vers ℓ lorsque $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante : pour toute suite réelle (x_n) , si la suite (x_n) converge au sens de Césaro vers ℓ , alors la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Césaro vers $f(\ell)$.

234. Soit g une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$. On pose, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, $A(\lambda) = \{x > 0, g(x) = \lambda x\}$.

- a) Montrez qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout λ dans $]0; \lambda_0[$, $A(\lambda) \neq \emptyset$.
 b) On pose $\lambda^* = \sup\{\lambda > 0, A(\lambda) \neq \emptyset\}$ (cela peut être $+\infty$). Montrer que, pour tout λ dans $]0; \lambda^*[$, $A(\lambda)$ est non vide.
 c) On pose $X_\lambda = \inf\{x > 0, g(x) = \lambda x\}$ quand c'est défini. Montrer que $X_\lambda \neq 0$.
 d) En toute généralité, la fonction $h : \lambda \mapsto X_\lambda$ est-elle continue sur $]0; \lambda^*[$?
 e) Montrer que cette fonction h est continue au voisinage de 0.

235. Soit $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que, pour tout t , $M(t)$ est inversible. L'objectif est de montrer que $\frac{d}{dt}(\det(M(t))) = \det(M(t)) \operatorname{tr}\left(M(t)^{-1} \frac{d}{dt}(M(t))\right)$.

- a) Le montrer si M est diagonale.
 b) Montrer que $\forall U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I_n + \varepsilon U) - \det(I_n)}{\varepsilon} = \operatorname{tr}(U)$.
 c) On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $M(t_0) = I_n$. Montrer la relation en t_0 .
 d) Traiter le cas général.

236. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_a : x \mapsto f(a+x)$ et $F_f = \operatorname{Vect}(f_a, a \in \mathbb{R})$.

- a) Si F_f est de dimension finie, montrer que $F_{f'}$ l'est aussi.
 b) Quelle est la dimension de F_f lorsque $f = \exp$?
 c) Réciproquement, montrer que si $\dim(F_f) = 1$, alors $f = \exp$.

237. On suppose $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $q \int_0^1 x^n e^x dx \in \mathbb{N}^*$. Conclure.
 Adapter la preuve précédente pour prouver $e^2 \notin \mathbb{Q}$.

238. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $x \mapsto f(x) + \int_0^x f(t)dt$ tend vers le réel ℓ en $+\infty$. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

239. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et intégrable telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)f(1-x) = 1$. Montrer que $\int_0^1 f \geq 1$.

240. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Montrer que $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{1}{8} \|f'\|_\infty$.

241. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a) On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

b) On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}$?

242. Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - e^x| = 0$. Montrer que $\deg(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

243. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$ et $f'_{n+1}(x) = e^x \sqrt{f_n(x)}$. Justifier l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et déterminer sa valeur.

244. Encadrer et donner un équivalent en $+\infty$ de $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$.

245. a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.

b) Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un développement asymptotique de $\ln(\Gamma(n+1))$ à la précision $O(\ln(n))$. En considérant la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Ind. On admet que l'on peut « dériver » le développement précédent c'est-à-dire que $\Psi(n+1) = \ln(n) + O(1/n)$.

d) Montrer que Ψ est croissante et justifier le développement admis précédemment.

246. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose qu'il existe des constantes $C_1, C_2, a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^a}$ et $|g(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^b}$.

Lorsque c'est possible, on pose $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$.

a) À quelle condition sur C_1, C_2, a, b la fonction $f * g$ est-elle définie sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose maintenant a et b strictement supérieurs à 1. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| \leq \frac{C_3}{(1 + |x|)^{\min(a,b)}}$.

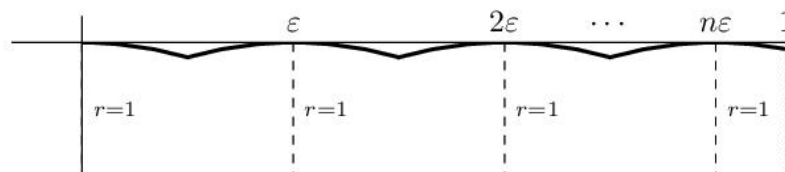
247. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^2$ et telles que $f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$.

248. ★★ Montrer que la fonction $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) = \int_0^1 (P(x) - e^x)^2 dx$ admet un unique point critique.

Géométrie

249. Montrer qu'un polygone à n sommets inscrit dans le cercle unité est d'aire maximale si et seulement s'il est régulier.

250. Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. Soit n le plus grand entier naturel tel que $n\varepsilon \leq 1$. On trace les cercles de rayon 1 et de centres $(k\varepsilon, -1)$ pour $0 \leq k \leq n$. Donner un développement limité de la somme des longueurs des arcs de cercle (voir figure).



Probabilités

251. On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules : 2 boules sont rouges et les $n - 2$ autres sont blanches. On tire les boules une par une sans remise. On s'arrête une fois qu'on a tiré les deux boules rouges. En moyenne, combien reste-t-il de boules dans l'urne ?

252. On considère une urne vide qu'on remplit successivement d'une boule blanche (avec une probabilité p) ou d'une boule rouge (avec une probabilité $1 - p$). On arrête de la remplir lorsqu'on obtient la première boule rouge. Puis on la vide jusqu'à tirer la boule rouge. Déterminer le nombre moyen de boules blanches restantes à la fin.

253. On dispose d'une urne vide. On ajoute des boules une par une et on s'arrête dès qu'on a ajouté une boule rouge. La probabilité d'ajouter une boule rouge est à chaque étape est égale à $\frac{1}{m}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. On mélange ensuite les boules et on les retire une à une jusqu'à retirer la boule rouge. Calculer l'espérance du nombre de boules restantes.

254. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A partie de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $M(A)$ la matrice carrée de taille n à coefficients dans $\{0, 1\}$ caractérisée par $\forall (i, j), M(A)_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in A$. On considère l'ensemble P des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ de cardinal n et une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur P . Quelle est la probabilité que $M(X)$ soit inversible ?

255. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$. Déterminer $\mathbf{E}(M_n^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ind. Distinguer selon la parité de k .

256. ★ Soient, pour $\lambda > 0$, $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda$ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

a) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda \text{ n'a que des racines réelles})$.

b) Même question pour $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$.

257. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble S_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in S_n$, on note $P_k(\sigma) = \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k, i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_k)\}$ l'ensemble des sous-suites croissantes de longueur k de la permutation σ . Déterminer l'espérance de $\text{Card}(P_k)$.

258. Soient $\lambda \in [0, 1]$, $(X_{k,n})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n \geq 1}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, où $X_{k,n}$ suit la loi $\mathcal{B}(\lambda/n)$. On pose $X_n = X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(\exp(tX_n))$.

259. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$.

a) Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.

b) Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $A > 0$, $\mathbf{P}(X > A) > 0$.

260. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(P(M_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) P(x) dx$.

261. On note $D(X)$ le nombre de diviseurs premiers de X , où X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(D(X))$.

b) On admet que $\sum_{\substack{p \text{ premier, } p \leq n}} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln n)$. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{D(X)}{\ln(\ln n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

262. Soient $C \in \text{GL}_q(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ nilpotente. Soit $p \in]0, 1[$. On définit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $B_0 = I_n$ et $B_{n+1} = A_n B_n$, où $\mathbf{P}(A_n = C) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = N) = 1 - p$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n \neq O)$.

263. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

Soient $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $p \in]0, 1[$. On note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit (u_n) une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ avec $u_0 = (1, 0)^T$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(u_{n+1} = R(\theta)u_n) = p$ et $\mathbf{P}(u_{n+1} = Mu_n) = 1 - p$. Déterminer la limite de $(\mathbf{E}(\|u_n\|))$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ puis pour θ quelconque.

264. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. Soit $p \in]0; 1[$. On pose $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les variables aléatoires $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et vérifient $\mathbf{P}(A_n = R) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = Q) = 1 - p$. On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A_n U_{n-1}$.

On note $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ les instants n successifs où $A_n = Q$.

a) Trouver la loi de $\|U_{t_1}\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique.

b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, donner une approximation du nombre d'indices i tels que $t_i \leq N$.

Dans toute la suite, on suppose que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c) Calculer $\mathbf{E}(\ln \|U_{t_1}\|)$.

d) Déterminer la loi de $\|U_{t_2}\|$.

e) Déterminer la loi de $\|U_{t_k}\|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

f) Déterminer $\mathbf{E}(\ln \|U_{t_k}\|)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.