# Mathématiques 2

**PSI**

**2020**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

## *Les fonctions de Lambert*

**Objectifs**

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

**Dépendance des parties**

Les fonctions $V$ et $W$ définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III et IV. Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

**Notations**

Pour des entiers $k$ et $n$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ » est noté $\displaystyle\binom{n}{k}$.

Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre $k$ et $n$.

## I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

**Q 1.** Justifier que l'application $f$ réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée $W$. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

**Q 2.** Justifier que $W$ est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

**Q 3.** Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

**Q 4.** Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

**Q 5.** Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions $f$ et $W$. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscise $-\mathrm{e}^{-1}$.

**Q 6.** Pour quelles valeurs du paramètre réel $\alpha$ la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$ ?

**Q 7.** Pour quelles valeurs du paramètre réel $\alpha$ la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$ ?

**Q 8.** Démontrer que l'application $f$ réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée $V$.

**Q 9.** Pour un paramètre réel $m$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de $m$, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions $V$ et $W$.

**Q 10.** Pour un paramètre réel $m$, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions $V$ et $W$, déterminer, suivant les valeurs de $m$, les solutions de (I.2). Illustrer graphiquement les différents cas.

**Q 11.** Pour des paramètres réels non nuls $a$ et $b$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de $a$ et $b$, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions $V$ et $W$.

# IV Approximation de $W$

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction $W$ définie dans la partie I.

Pour tout réel positif $x$, on considère la fonction $\phi_x$ définie par

$$\phi_x : \left| \begin{array}{lcc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

**Q 35.** Démontrer que, pour tout réel positif $x$, $W(x)$ est un point fixe de $\phi_x$, c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

**Q 36.** Démontrer que, pour tout réel positif $x$, la fonction $\phi_x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

**Q 37.** En déduire que

$$\forall x \in [0, \mathrm{e}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|\,.$$

**Q 38.** Pour tout réel $a \in ]0, \mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions $(w_n)$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction $W$.

**Q 39.** La suite de fonctions $(w_n)$ converge-t-elle uniformément vers $W$ sur $[0, \mathrm{e}]$ ?

• • • FIN • • •