

Exercice 2. EXTREMUMS D'UNE FORME QUADRATIQUE SUR LA BOULE UNITÉ FERMÉE

Étude d'un exemple

11 L'application $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale, donc continue sur B_2 , qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (espace vectoriel de dimension finie). Par suite, elle est bornée et atteint ses bornes sur B_2 .

L'application f admet un maximum et un minimum sur B_2 .

12 Par définition de la frontière S_2 de la boule B_2 , on peut utiliser le paramétrage

$$S_2 = \{(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in [0; 2\pi[\}$$

Notons g la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$ définie sur $[0; 2\pi[$. Pour tout $t \in [0; 2\pi[$,

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\cos(t), \sin(t)) \\ &= \cos(t)^2 + \sin(t)^2 + 4\cos(t)\sin(t) \\ g(t) &= 1 + 2\sin(2t) \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction g est dérivable et, pour tout $t \in [0; 2\pi[$,

$$g'(t) = 4\cos(2t)$$

qui s'annule en $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ et $7\pi/4$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/4$	2π
$g'(t)$	+	0	-	0	+	0
g	1	↗	↘	↗	↘	1

Les extremums de f sur $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ sont -1 et 3 .

13 Comme elle est polynomiale,

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $(x_1, x_2) \in B'_2$ un point critique de f . Par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

ce qui s'écrit $2x_1 + 4x_2 = 0$ et $2x_2 + 4x_1 = 0$

Ainsi,
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_2 + 4x_1 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

donc
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

puis
$$\begin{cases} 12x_2 = 0 \\ 6x_1 = 0 \end{cases}$$

soit $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Le point $(0, 0)$ est le seul point critique de f dans la boule unité ouverte $B'_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Comme B'_2 est un ouvert, rappelons qu'une condition nécessaire pour que f atteigne son extremum en $(x_1, x_2) \in B'_2$ est que (x_1, x_2) soit un point critique de f . Ce résultat va être exploité dans la question suivante.

14 On a l'union disjointe $B_2 = B'_2 \cup S_2$. D'après la question 13, le seul point en lequel f peut atteindre un extremum sur B'_2 est $(0, 0)$, et $f((0, 0)) = 0$. Comme les extremums de f sur S_2 sont -1 et 3 d'après la question 12 et que $-1 < 0 < 3$, on en déduit qu'il n'y a pas d'extremum sur la boule ouverte B'_2 . Ainsi,

Le maximum de f sur B_2 est 3 et son minimum est -1 .

15 D'après la définition de l'énoncé,

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc son polynôme caractéristique est égal à

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2 - 4 \\ &= (1-X-2)(1-X+2) \\ \chi_f(X) &= (-1-X)(3-X) \end{aligned}$$

Par suite, les valeurs propres de M_f , qui sont les racines de χ_f , sont égales à -1 et 3 .

La plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2 .

Le cas général

16 Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$(M_f X)_i = \sum_{j=1}^n (M_f)_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} m_{j,i} x_j + m_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_j$$

Notons que si $i = 1$, la somme $\sum_{j=1}^{i-1}$ est vide, et vaut donc 0 par convention.

$$\begin{aligned} \text{Il vient} \quad X^T M_f X &= \sum_{i=1}^n (X^T)_i (M_f X)_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} m_{j,i} x_j + m_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} m_{j,i} x_i x_j + \sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_i x_j \\ \text{d'où} \quad X^T M_f X &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j+1}^n m_{j,i} x_i x_j + \sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

en permutant les deux premières sommes. Par suite, en échangeant le rôle de i et de j dans les deux premières sommes,

$$\begin{aligned} X^T M_f X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n m_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i x_i \quad \text{car } m_{i,i} = a_{i,i} \text{ et } m_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{2} \\ X^T M_f X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{X^T M_f X = f(x)}$$

17 La matrice M_f est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral,

$$\boxed{\text{La matrice } M_f \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

⌋ Notez que la précision « réelle » est si fondamentale pour ce théorème qu'aucun point ne vous sera accordé par votre correcteur si vous l'oubliez.

18 Comme P est orthogonale, $P^{-1} = P^T$, donc

$$Y^T Y = (P^{-1} X)^T (P^{-1} X) = X^T (P^{-1})^T P^{-1} X = X^T P P^{-1} X = X^T X$$

Par définition de la norme euclidienne rappelée en début d'énoncé,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = X^T X$$

d'où

$$\boxed{Y^T Y = X^T X = \|x\|^2}$$

19 Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a $(DY)_i = \lambda_i y_i$, donc

$$Y^T D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

d'où

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Or,

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = Y^T Y = \|x\|^2 \leq 1$$

d'après la question 18, donc

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq \lambda_1 \quad \text{et} \quad \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \lambda_n$$

puisque $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{Si } \lambda_1 < 0 < \lambda_n, \text{ alors } \lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n.}$$

En outre, par définition de Y ,

$$\begin{aligned} Y^T D Y &= (P^{-1} X)^T D (P^{-1} X) \\ &= X^T (P^{-1})^T D P^{-1} X \\ &= X^T P D P^{-1} X && \text{car } P \text{ est orthogonale} \\ &= X^T M_f X && \text{par définition de } D \end{aligned}$$

donc

$$Y^T D Y = f(x) \quad \text{d'après la question 16}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Si } \lambda_1 < 0 < \lambda_n, \text{ alors } \lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n.}$$

20 D'après la question précédente, si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors f est minorée par λ_1 et majorée par λ_n . Notons X_1 un vecteur propre pour M_f associé à la valeur propre λ_1 et de norme 1. Alors $X_1 \in B_n$ et

$$f(X_1^T) = X_1^T M_f X_1 = X_1^T \lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_1^T X_1 = \lambda_1 \|X_1\|^2 = \lambda_1$$

De même, en notant X_n un vecteur propre pour M_f associé à la valeur propre λ_n et de norme 1, on a $X_n \in B_n$ et $f(X_n^T) = \lambda_n$. On en déduit que ce minorant et ce majorant sont atteints par f sur B_n , ce sont donc un minimum et un maximum.

$$\boxed{\text{Si } \lambda_1 < 0 < \lambda_n, \text{ alors } \max_{B_n}(f) = \lambda_n \text{ et } \min_{B_n}(f) = \lambda_1.}$$

21 Si $\lambda_1 \geq 0$, rien ne change pour le maximum, qui vaut toujours λ_n . En revanche, au début de la question 19, on obtient

$$Y^T D Y \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 0$$

d'où

$$f(x) \geq 0$$

La fonction f est donc minorée par 0. Puisque $0 \in B_n$ et $f(0) = 0$ par linéarité de f , on en déduit que

$$\boxed{\text{Si } \lambda_1 \geq 0, \text{ le minimum de } f \text{ sur } B_n \text{ est } 0 \text{ et son maximum est } \lambda_n.}$$

Application des résultats

22 Par définition de f , $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En suivant l'indication de l'énoncé, exprimons

$$M_f - 2I_n = - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Toutes les colonnes de cette matrice non nulle étant identiques, elle est de rang 1. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim \text{Ker}(M_f - 2I_n) = n - 1$. Ainsi, 2 est valeur propre de M_f de multiplicité supérieure ou égale à $n - 1$. En outre, M_f est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si 2 était valeur propre de multiplicité n ,

M_f serait semblable, puis égale, à la matrice $\text{Diag}(2, \dots, 2)$, ce qui est faux. Ainsi, 2 est valeur propre de multiplicité exactement égale à $n - 1$.

Comme la somme des valeurs propres de M_f vaut $\text{Tr}(M_f) = n$, la dernière valeur propre de M_f est égale à $n - 2(n - 1) = -n + 2$.

Avec les notations de la partie II, on en déduit que $\lambda_1 = -n + 2 < 0$ et $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 2 > 0$. Ainsi, la question 20 s'applique et

$\min_{B_n}(f) = -n + 2$	et	$\max_{B_n}(f) = 2$
--------------------------	----	---------------------

EXERCICE II

1.a Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Montrons les deux sens de l'équivalence.

Supposons d'abord qu'il existe une fonction réelle a de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$$

Alors, en dérivant par rapport à la variable y l'égalité précédente, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Grâce au théorème de Schwarz, utilisable ici puisque f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

On obtient donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = a(x) f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

c'est-à-dire que f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, supposons que la fonction f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$. La fonction f ne s'annulant pas, la fonction suivante est bien définie

$$w: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Prendre garde ici à ne pas directement noter $a(x)$ le terme $w(x, y)$: en effet, on n'a pas encore démontré qu'il ne dépendait pas de la variable y .

Démontrons que la fonction w ne dépend pas de la variable y . Comme la fonction w est de classe $\mathcal{C}^1$ (puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$), on peut calculer la dérivée partielle de w selon la variable y :

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)^2}$$

Or ce terme est nul puisque la fonction f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$. Ainsi, la fonction $y \mapsto w(x, y)$ est constante sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: on note $a(x)$ cette constante. En particulier, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) = w(x, 0)$. Comme la fonction w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est continûment dérivable selon sa première variable. Ainsi, la fonction a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la définition de w montre que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$$

La fonction f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$ si et seulement s'il existe une fonction réelle a , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$$



Pour répondre à cette question comme à la suivante, il faut penser à bien démontrer les deux sens de l'implication. Ainsi, le rapport du jury précise que « si l'on peut comprendre que l'étape difficile ne soit pas toujours surmontée, on attend au moins des candidats assez de lucidité pour ne pas croire que la simple vérification de la formule proposée constitue une démonstration complète. Pour démontrer la réciproque, encore fallait-il ne pas confondre les fonctions d'une variable avec les fonctions de deux variables comme ceux qui, à la question 1.a, proposent, pour définir $a(x)$ une expression en x et y , sans se soucier de prouver que cette expression ne dépend pas de y . »

1.b Considérons dans un premier temps φ et ψ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Montrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ vérifie l'équation ($\mathcal{E}$). Pour cela, calculons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi'(x)\psi(y) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}f(x, y)$$

la deuxième égalité provenant du fait que la fonction φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Posons alors $a(x) = \varphi'(x)/\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et grâce à la question 1.a, la fonction f vérifie l'équation ($\mathcal{E}$).

Réciproquement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas et vérifiant l'équation ($\mathcal{E}$). En utilisant à nouveau la question 1.a, on sait qu'il existe une fonction réelle a de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$$

Ici, afin de trouver les fonctions φ et ψ , utilisons la démonstration du sens précédent dans lequel on a posé $a(x) = \varphi'(x)/\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, si la fonction φ devient l'inconnue de l'équation précédente, on obtient une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre de solution $\varphi(x) = \alpha e^{A(x)}$ où A est une primitive de la fonction a et α une constante réelle, non nulle puisqu'on veut que la fonction φ ne s'annule pas.

Soit A la primitive de la fonction a qui s'annule en 0, qui existe puisque la fonction a est continue sur $\mathbb{R}$:

$$A: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x a(t) dt \end{cases}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit la fonction φ par

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha e^{A(x)} \end{cases}$$

La fonction a étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\exp$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la primitive A et la fonction φ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, α étant choisi non nul, la fonction φ ne s'annule jamais. Par définition de la fonction A , il vient par ailleurs

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = \alpha A'(x)e^{A(x)} = a(x)\varphi(x) \quad (1)$$

Soit g la fonction définie par

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{f(x, y)}{\varphi(x)} \end{cases}$$

Elle est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ puisque la fonction φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrons qu'elle ne dépend pas de la variable x . Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x, y)}{\varphi(x)^2} \\ &= \frac{(a(x)\varphi(x) - \varphi'(x))f(x, y)}{\varphi(x)^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 0 \quad (\text{grâce à l'équation (1)})\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto g(x, y)$ est constante. Notons $\psi(y)$ cette valeur constante. Il vient alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

Puisque la fonction f ne s'annule pas, la fonction ψ ne s'annule pas non plus. De plus, comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $y \mapsto g(0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\psi(y) = g(0, y)$: ainsi, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$ sont exactement les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas.

Par ailleurs, le couple (φ, ψ) n'est pas unique puisque, si (φ, ψ) est un tel couple associé à la fonction f , tout couple de la forme $(\lambda\varphi, \frac{1}{\lambda}\psi)$ convient pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Il n'y a pas unicité du couple (φ, ψ) pour une solution f de $(\mathcal{E})$.

On peut résoudre l'équation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$$

de manière plus traditionnelle. En effet, si on fixe $y \in \mathbb{R}$ et si on pose $h_y(x) = f(x, y)$, on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h_y'(x) = a(x)h_y(x)$$

Les solutions sont de la forme $h_y(x) = \alpha_y e^{A(x)}$ où A est une primitive de a . Ainsi, en posant $\varphi(x) = e^{A(x)}$ et $\psi(y) = \alpha_y = f(x_0, y)e^{-A(x_0)}$ (avec un réel x_0 quelconque), on démontre que φ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas et telles que $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.c Notons $u = g(0) = h(0)$: par hypothèse u est un réel non nul. Posons donc

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{g(x)h(y)}{u} \end{cases}$$

Puisque g et h sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas, la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ne s'annulant pas. Grâce à la question 1.b, la fonction f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$. Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, 0) = g(x) \frac{h(0)}{u} = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(0, y) = \frac{g(0)}{u} h(y) = h(y)$$

On a ainsi démontré l'existence de la fonction f . Pour montrer qu'elle est unique, considérons f_1 et f_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$, ne s'annulant pas et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x, 0) = g(x) = f_2(x, 0) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_1(0, y) = h(y) = f_2(0, y)$$

Grâce à la question 1.b, on sait qu'il existe quatre fonctions φ_1 , φ_2 , ψ_1 et ψ_2 de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_1(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \varphi_2(x) \psi_2(y)$$

En particulier, il vient pour tout $i \in \{1, 2\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \varphi_i(x) \psi_i(0) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad h(y) = \varphi_i(0) \psi_i(y)$$

Ainsi, puisque les fonctions φ_1 et ψ_1 ne s'annulent pas,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \frac{\psi_2(0)}{\psi_1(0)} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \psi_1(y) = \psi_2(y) \frac{\varphi_2(0)}{\varphi_1(0)}$$

Considérons finalement un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Les égalités précédentes montrent que

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \varphi_1(x) \psi_1(y) \\ &= \varphi_2(x) \psi_2(y) \frac{\varphi_2(0) \psi_2(0)}{\varphi_1(0) \psi_1(0)} \\ &= f_2(x, y) \frac{f_2(0, 0)}{f_1(0, 0)} \\ f_1(x, y) &= f_2(x, y) \quad (\text{car } f_1(0, 0) = g(0) = h(0) = f_2(0, 0)) \end{aligned}$$

On a ainsi montré l'unicité.

Il existe une unique fonction f solution de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas telle que
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, 0) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(0, y) = h(y)$

2.a La fonction f est une solution de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas. D'après la question 1.b, il existe deux fonctions φ et ψ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas, telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$$

Puisque les fonctions φ et ψ ne s'annulent pas et sont continues, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'assurer que ces deux fonctions sont soit strictement positives, soit strictement négatives. Par ailleurs, la fonction f est choisie strictement positive : considérons donc sans perte de généralité que les fonctions φ et ψ sont strictement positives (si l'une est strictement négative, l'autre l'est nécessairement aussi : on peut donc les multiplier toutes deux par le réel -1).

Il y a une erreur dans l'énoncé : les fonctions partielles à considérer sont $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$.

Supposons dans un premier temps que f admette un maximum local en (x_0, y_0) . Par définition, il existe donc un réel η strictement positif tel que

$$\forall (x, y) \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \times [y_0 - \eta; y_0 + \eta] \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

En évaluant la formule précédente en $x = x_0$, on obtient

$$\forall y \in [y_0 - \eta; y_0 + \eta] \quad \varphi(x_0) \psi(y) \leq \varphi(x_0) \psi(y_0)$$

Simplifions alors par $\varphi(x_0)$, sans changer le sens des inégalités, puisque $\varphi(x_0) > 0$

$$\forall y \in [y_0 - \eta; y_0 + \eta] \quad \psi(y) \leq \psi(y_0)$$

Ainsi, on a prouvé que ψ admet un maximum local en y_0 : il en est de même de la fonction $y \mapsto \varphi(x_0)\psi(y) = f(x_0, y)$. Par un raisonnement symétrique, on prouve de même que la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un maximum local en x_0 .

Réciproquement, supposons que les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ admettent un maximum local respectivement en x_0 et y_0 . Alors, par définition, il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in [x_0 - \eta_1 ; x_0 + \eta_1] \quad f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

$$\forall y \in [y_0 - \eta_2 ; y_0 + \eta_2] \quad f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$$

On en déduit, en simplifiant par $\varphi(x_0)$ et $\psi(y_0)$ que

$$\forall x \in [x_0 - \eta_1 ; x_0 + \eta_1] \quad \varphi(x) \leq \varphi(x_0)$$

$$\forall y \in [y_0 - \eta_2 ; y_0 + \eta_2] \quad \psi(y) \leq \psi(y_0)$$

Comme les fonctions φ et ψ sont strictement positives, multiplions les inégalités précédentes pour obtenir

$$\forall (x, y) \in [x_0 - \eta_1 ; x_0 + \eta_1] \times [y_0 - \eta_2 ; y_0 + \eta_2] \quad \varphi(x)\psi(y) \leq \varphi(x_0)\psi(y_0)$$

On a donc démontré que f admet un maximum local en (x_0, y_0) .

La fonction f admet un maximum local en (x_0, y_0) si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ admettent un maximum local respectivement en x_0 et y_0 .

Il n'était nullement nécessaire dans cette question d'utiliser la caractérisation d'un maximum local à l'aide des dérivées des fonctions. Par ailleurs, rappelons que l'équivalence précédente est généralement fautive. Seule l'implication suivante subsiste : « Si la fonction f admet un maximum local en (x_0, y_0) alors les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ admettent un maximum local respectivement en x_0 et y_0 . » On vérifie que la fonction $(x, y) \mapsto 3xy - x^2 - y^2$ fournit un contre-exemple à l'implication réciproque pour $x_0 = y_0 = 0$.

2.b Grâce à la question précédente, il vient immédiatement que

L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f admet un maximum local est $A \times B$ où A (respectivement B) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ (respectivement $y \mapsto f(x_0, y)$) admet un maximum local.

3.a La fonction F est la composée des fonctions u et v définies par

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto xy \end{cases} \quad \text{et} \quad v: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto t^3 + |t|^3 \end{cases}$$

En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = v \circ u(x, y)$. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'elle est polynomiale. Par ailleurs, la fonction v vérifie la propriété suivante

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

ce qui montre que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -\infty ; 0 [$ et sur $] 0 ; +\infty [$. Ainsi, calculons v' et v'' sur ces intervalles :

$$v'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 6t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad v''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 12t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

En particulier, les limites de $v(t)$, $v'(t)$ et $v''(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs inférieures ou supérieures sont toutes égales (à 0). Ainsi, la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition,

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction valeur absolue étant continue, mais non dérivable en 0, il ne fallait pas conclure trop vite quant à la régularité de la fonction F .

3.b Montrons que F vérifie l'équation $(\mathcal{E})$ en calculant ses dérivées successives.

La fonction F s'annule (en $(0, 0)$ par exemple) : on ne peut donc pas utiliser les critères de la question 1.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, grâce à la formule de dérivation d'une composée de fonctions, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial(v \circ u)}{\partial x}(x, y) \\ &= v'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \\ &= v'(xy) y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \leq 0 \\ 6x^2 y^3 & \text{si } xy \geq 0 \end{cases}$$

De même,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \leq 0 \\ 6x^3 y^2 & \text{si } xy \geq 0 \end{cases}$$

Comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, utilisons le théorème de Schwarz pour inverser l'ordre des dérivations, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left((v' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)(x, y) \\ &= \frac{\partial(v' \circ u)}{\partial y}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + (v' \circ u)(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= v''(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + v'(u(x, y)) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= v''(xy) xy + v'(xy) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } xy \leq 0 \\ 18x^2 y^2 & \text{si } xy \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $xy \leq 0$, l'équation $(\mathcal{E})$ est vérifiée, puisque les termes de chaque côté de l'égalité sont nuls. Pour $xy > 0$, on a

$$F(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x^3 y^3 \times 18x^2 y^2 = 36x^5 y^5 = 6x^2 y^3 \times 6x^3 y^2 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

La fonction F est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

3.c Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux fonctions φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $F(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour $y = -x$, on a

$$\varphi(x)\psi(-x) = F(x, -x) = 0$$

Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x, x)F(-x, -x) = 4x^{12} > 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} F(x, x)F(-x, -x) &= \varphi(x)\psi(x)\varphi(-x)\psi(-x) \\ &= [\varphi(x)\psi(-x)][\varphi(-x)\psi(x)] \end{aligned}$$

$$F(x, x)F(-x, -x) = 0$$

On obtient une contradiction.

Il n'existe donc pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$