

1 ————— (*) ————— **Centrale PC 2010**

Etudier en fonction de $p \in \mathbb{N}$ le caractère $\mathcal{C}^0$ puis le caractère $\mathcal{C}^1$ du prolongement par 0 en $(0, 0)$ de

$$f : (x, y) \mapsto (x + y)^p \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Pour simplifier les notations, notons $g : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-1/2}$, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il est clair que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition (et f également par conséquent). De plus, $\sin \circ g$ est bornée. En revanche, la quantité $\sin(g(x, 0)) = \sin(1/|x|)$ n'a clairement pas de limite en 0 donc g n'en a pas en $(0, 0)$. On déduit immédiatement de ceci que f tend vers 0 en $(0, 0)$ si et seulement si $p \geq 1$. Ainsi,

La fonction f est continue si et seulement si $p \geq 1$.

Passons au caractère $\mathcal{C}^1$. Sous réserve d'existence, la dérivée partielle par rapport à x est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{p-1} \sin(1/|x|)$$

Il est clair que cette limite existe si et seulement si $p - 1 \geq 1$ soit $p \geq 2$. Par symétrie des rôles entre x et y , on a la même condition pour l'existence de la dérivée partielle par rapport à y . Prenons maintenant $p \geq 2$. Alors, f admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de $\mathbb{R}^2$ avec pour tout (x, y) (après factorisation),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \left[p \sin(g(x, y)) - \frac{x(x+y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos(g(x, y)) \right] (x+y)^{p-1} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que pour tout (x, y) , puisque $|x|$ et $|y|$ sont inférieurs ou égaux à $\sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\left| (x+y)^p \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| \leq 2^p (x^2 + y^2)^{p-2}$$

Cette quantité est donc bornée au voisinage de $(0, 0)$ lorsque $p = 2$ et de limite nulle si $p \geq 3$. Il en est alors de même de $\partial f / \partial x$. Cependant, pour $p = 2$, on vérifie immédiatement que $(\partial f / \partial x)(x, 0)$ n'a à nouveau pas de limite. Par conséquent,

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p \geq 3$.

2 ————— (**) ————— **PC Centrale 2016**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \neq y, \quad F(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

- (a). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
- (b). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que le prolongement continu de F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- (a). Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x ,

$$F(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow x} f'(x)$$

Pour prolonger F par continuité sur $\mathbb{R}^2$, on est donc amené à poser

$$\tilde{F} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifions que la fonction ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il est clair qu'elle est $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Il ne reste donc qu'à s'assurer de la continuité de $\tilde{F}$ en (x, x) avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Appliquons la formule Taylor avec reste intégral à l'ordre 1. Ainsi,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \quad \text{d'où} \quad F(x, y) = \frac{1}{y - x} \int_x^y f'(t) dt$$

Par conséquent, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x, y) - F(x_0, x_0) = \frac{1}{y - x} \int_x^y (f'(t) - f'(x_0)) dt$$

L'application $t \mapsto f'(t) - f'(x_0)$ est de limite nulle en 0 donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que

$$\forall t \in \mathcal{V}, \quad |f'(t) - f'(x_0)| \leq \epsilon$$

On en déduit aussitôt que lorsque x et y appartiennent à $\mathcal{V}$, la quantité $|F(x, y) - F(x_0, x_0)|$ est majorée par ϵ . Ainsi, F est continue en (x_0, x_0) et

La fonction F se prolonge en une fonction $\tilde{F}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

- (b). Cette fois, $\tilde{F}$ est clairement $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Il convient maintenant d'étudier l'existence de dérivées partielles en un point (x, x) de Δ , puis la continuité de celles-ci en ce point.

Pour vérifier l'existence des dérivées partielles en un point de Δ , utilisons la formule de Taylor-Young. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Lorsque y tend vers x ,

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + \frac{(y - x)^2}{2}f''(x) + o((y - x)^2) \quad (*)$$

soit encore

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) + \frac{(y - x)}{2}f''(x) + o(y - x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tilde{F}(x, y) = \tilde{F}(x, x) + \frac{(y - x)}{2}f''(x) + o(y - x)$$

puis

$$\frac{\tilde{F}(x, y) - \tilde{F}(x, x)}{y - x} = \frac{1}{2}f''(x) + o(1)$$

On en déduit que la fonction $y \mapsto \tilde{F}(x, y)$ est dérivable en x , ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle $\partial \tilde{F} / \partial x$ en (x, x) . Cette application est donc définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier par

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)}{(y - x)^2} & \text{si } x \neq y \\ f''(x)/2 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Pour établir la continuité de cette application, il suffit d'utiliser à nouveau la formule de Taylor avec reste-intégral (à l'ordre 2 cette fois), de sorte que pour tous $x \neq y$,

$$f(y) - f(x) - (y - x)f'(x) = \int_x^y (y - t)f''(t) dt$$

et donc

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x_0, x_0) = \frac{1}{(y - x)^2} \int_x^y (y - t)(f''(t) - f''(x_0)) dt$$

La continuité se justifie alors de la même manière que pour $\tilde{F}$. On peut donc conclure.

La fonction $\tilde{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 ————— (*) —————

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction suivante ait un Laplacien nul

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x/y) \end{aligned}$$

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. L'application $\varphi : (x, y) \mapsto f(x/y)$ est alors également $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par composition et pour tout $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x}{y^3}f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

et par suite

$$\Delta \varphi(x, y) = \frac{1}{y^2} \left[\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) f''\left(\frac{x}{y}\right) + 2\frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) \right]$$

On en déduit que $\Delta \varphi$ est nul si et seulement si f' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(1 + t^2)y'(t) + 2ty(t) = 0 \quad (\mathbf{E})$$

Les solutions de (E) sont les applications de la forme

$$y : t \mapsto \lambda \exp \left(- \int \frac{2t \, dt}{1+t^2} \right) = \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir la forme des fonctions f telles que $\Delta f = 0$. Précisément,

Les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que Δf est nul sont celles de la forme

$$f : t \mapsto \lambda \arctan t + \mu$$

où λ et μ sont deux réels arbitraires.

4

(**)

X PC 2009

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Justifier l'existence de $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\star)$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors

$$f(x, y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) \, dt + f(0, y) \quad \text{soit} \quad f(x, y) = \int_0^x u(t, y) \, dt + f(0, y)$$

De même
$$f(0, y) = \int_0^y f(0, t) \, dt + f(0, 0) \quad \text{d'où} \quad f(0, y) = \int_0^y v(0, t) \, dt + f(0, 0)$$

Pour conclure, toute fonction vérifiant $(\star)$ est définie à la constante $f(0, 0)$ près par

$$f : (x, y) \mapsto \int_0^x u(t, y) \, dt + \int_0^y v(0, t) \, dt + f(0, 0) \quad (\star\star)$$

Réciproquement, soit f une application de la forme $(\star\star)$. Par construction, on a immédiatement $u = \partial f / \partial x$. Pour calculer la dérivée partielle par rapport à y , on fixe $x \in \mathbb{R}$ puis on applique le théorème de dérivation sous le signe somme à l'intégrale à paramètre. L'application u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ dont admet une dérivée partielle par rapport à y . De plus,

- Pour tout réel t , l'application $y \mapsto (\partial u / \partial y)(t, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel y , les applications $t \mapsto u(t, y)$ et $t \mapsto (\partial u / \partial y)(t, y)$ sont continues sur $[0; x]$ et donc intégrables.
- Pour tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ et tout couple $(t, y) \in [0; x] \times [a; b]$, on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{[0; x] \times [a; b]}$$

Le théorème s'applique et prouve que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) \, dt + v(0, y)$$

Or, par hypothèse, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, et par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(t, y) \, dt + v(0, y) = v(x, y)$$

On a donc montré que réciproquement, toute fonction définie par la relation $(\star\star)$ vérifie $(\star)$. Notamment,

Il existe une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial f}{\partial y}$.

5

(*)

Etudier les extremums locaux de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 + 2y^3 + 3x^2$, puis ses extremums globaux sur $[-3; 3]^2$.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec des dérivées partielles données par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy + 6y^2$$

Les points critiques de f sont donc les couples (x, y) tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ y(x+y) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x(x+1) = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

On a donc trois points critiques qui sont $(0, 0)$, $(-2, 0)$ et $(-1, 1)$. Etudions f au voisinage de ces trois points.

- Lorsque t tend vers 0, on a $f(0, t) = 2t^3$ qui change de signe au voisinage de 0. Par suite, f ne présente en $(0, 0)$ aucun extremum local.
- On a $f(-1, 1) = 1$ et pour tous réels (r, s)

$$f(-1+r, 1+s) - f(-1, 1) = 3s^2 + 6rs + r^3 + 3rs^2 + 2s^3$$

En prenant $r = 0$, on a une quantité équivalente à $3s^2$ donc positive au voisinage de 0, et en prenant $r = -s$, on a pour équivalent $-3s^2$ qui est cette fois négatif au voisinage de 0. Ainsi, il n'y a pas non plus d'extremum local en $(-1, 1)$.

- Pour finir, $f(-2, 0) = 4$ et pour tous (r, s)

$$f(-2+r, s) - f(-2, 0) = -3r^2 - 6s^2 + r^3 + 3rs^2 + 2s^3$$

Lorsque (r, s) tend vers $(0, 0)$, les termes d'ordre 3 sont négligeables devant ceux de degré 2, et la différence est du signe de $-3r^2 - 6s^2$ donc négative. Ainsi, il y a un maximum local en $(-2, 0)$.

Pour conclure,

La fonction f admet un unique extremum local sur $\mathbb{R}^2$, situé au point $(-2, 0)$.

Notons maintenant $K = [-3; 3]$. Il s'agit d'un compact de $\mathbb{R}^2$ donc la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur K . Notons que $(-2, 0)$ appartient à K et rappelons que $f(-2, 0) = 4$. Toutefois, puisque $f(0, 0) = 0$ et que par exemple, $f(3, 3) = 189$, il ne s'agit pas d'un des deux extremums globaux de f sur K . Comme $(-2, 0)$ est le seul point critique de $]-3; 3[^2$, ces derniers sont donc atteints nécessairement sur le bord de K .

Notons par conséquent f_1, f_2, f_3 et f_4 les applications

$$f_1 : x \mapsto f(x, -3) \quad f_2 : x \mapsto f(x, 3) \quad f_3 : y \mapsto f(-3, y) \quad \text{et} \quad f_4 : y \mapsto f(3, y)$$

On vérifie facilement par une étude de fonctions les propriétés suivantes :

- Les fonctions f_1 et f_2 sont strictement croissantes, et leurs minimums respectifs sont donc $f_1(-3) = -135$ et $f_2(-3) = -27$, tandis que leurs maximums respectifs sont $f_1(3) = 81$ et $f_2(3) = 189$.
- La fonction f_3 (resp. f_4) est croissante sur $[-3; 0]$ (resp. décroissante), et décroissante sur $[0; 3]$ (resp. croissante). Elle atteint son minimum en -3 (resp. 0) qui vaut -135 (resp. 54), et son maximum en 0 (resp. 3) qui est nul (resp. égal à 189).

Il résulte de cette analyse que

La fonction f admet 189 pour maximum global sur $[-3; 3]$, atteint en $(3, 3)$, et -135 pour minimum global, atteint en $(-3, -3)$.

6 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' est strictement croissante et que f s'annule en deux points $x_0 < x_1$.

(a). Montrer que f' s'annule en un unique point et que ce point appartient à $]x_0; x_1[$.

(b). Soit $g : (x, y) \mapsto \int_x^y f(t) dt$. Etudier les extremums locaux et globaux de g .

- (a) L'annulation de f' sur $]x_0; x_1[$ est une conséquence directe du théorème de Rolle, appliqué entre x_0 et x_1 , l'unicité du point d'annulation une conséquence de la stricte monotonie de f' .

La fonction f' s'annule en un unique point qui appartient à $]x_0; x_1[$.

- (b) L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles sont données par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(y)$$

Les points critiques de f sont donc les couples (x, y) avec $f(x) = f(y) = 0$. Par conséquent, on a au moins quatre points critiques donnés par

$$(x_0, x_0) \quad (x_1, x_1) \quad (x_0, x_1) \quad \text{et} \quad (x_1, x_0)$$

Par ailleurs, f' étant strictement croissante et s'annulant en un unique point $\alpha \in]x_0; x_1[$, elle est négative sur $]-\infty; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; +\infty[$. Il s'ensuit que f ne s'annule qu'en x_0 et x_1 , est strictement négative sur $]x_0; x_1[$ et positive en

dehors. Les quatres points précédemment cités sont donc les seuls points critiques de f . Etudions maintenant la présence de maximum locaux en ces points.

Dans un premier temps, grâce au signe de f établi précédemment, il vient

$$f(x_0, x_1) = -f(x_1, x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt < 0 \quad \text{tandis que} \quad f(x_0, x_0) = f(x_1, x_1) = 0$$

On peut donc éliminer (x_0, x_0) et (x_1, x_1) de l'étude. Ensuite, lorsque (r, s) tend vers $(0, 0)$, on peut écrire

$$f(x_0 + r, x_1 + s) = \int_{x_0+r}^{x_0} f(t) dt + f(x_0, x_1) + \int_{x_1}^{x_1+s} f(t) dt$$

A l'aide d'un développement limité d'une primitive F de f , on a ensuite par Taylor-Young

$$\int_{x_0+r}^{x_0} f(t) dt = F(x_0) - F(x_0 + r) = -rF'(x_0) - \frac{r^2}{2}F''(x_0) + o(r^2)$$

et donc (en pratiquant le même calcul pour la seconde intégrale),

$$f(x_0 + r, x_1 + s) = f(x_0, x_1) - \frac{r^2}{2}f'(x_0) + \frac{s^2}{2}f'(x_1) + o(r^2) + o(s^2)$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $f'(x_1) > 0$ tandis que $f'(x_0) < 0$ pour constater que $f(x_0 + r, x_1 + s) - f(x_0, x_1)$ est positif pour (r, s) au voisinage de $(0, 0)$. Ainsi, on a un minimum local en (x_0, x_1) . De la même manière, on justifie que l'on a un maximum local en (x_1, x_0) .

La fonction f présente un maximum local en (x_1, x_0) et un minimum local en (x_0, x_1) .

Pour ce qui est de l'existence ou non d'un extremum global, remarquons que la fonction f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ car f' est strictement croissante. Son graphe est donc au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle en x_0 et celle en x_1 . On en déduit qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$. Dès lors, il est clair que $g(0, y)$ tend vers $-\infty$ quand y tend vers $-\infty$, et $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$. Ainsi,

La fonction f n'a pas d'extremum global.

7 _____ (*) _____ **Mines PC 2008**

On pose

$$f : [0; \pi]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

Trouver les extremums de cette fonction.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; \pi]^2$. Ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x + \cos(x + y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos y + \cos(x + y)$$

Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos y + \cos(x + y) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \cos y = -\cos(x + y) \end{cases}$$

La fonction $\cos$ étant injective sur $[0; \pi]$, les points critiques sont les couples (x, x) où x vérifie

$$\cos x + \cos(2x) = 0 \quad \text{soit} \quad 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$$

Il ne reste donc que les points $(\pi/3, \pi/3)$ et (π, π) .

La fonction f étant continue sur le compact $[0; \pi]^2$, elle admet un maximum global et un minimum global. Ces derniers sont atteints soit en un point critique de $]0; \pi[^2$, soit au bord du domaine. En remarquant que pour tout réel x ,

$$f(x, 0) = f(0, x) = 2 \sin x \quad \text{et} \quad f(x, \pi) = f(\pi, x) = 0$$

on constate que le maximum sur le bord vaut 2 (et est atteint en $x = \pi/2$) tandis que le minimum vaut 0. Puisque la valeur en $(\pi/3, \pi/3)$ vaut $3\sqrt{3}/2$ qui est strictement supérieure à 2, on peut conclure.

La fonction f admet 0 pour minimum global atteint sur les deux segments du bord issus de (π, π) , et maximum global $3\sqrt{3}/2$ atteint en $(\pi/3, \pi/3)$.

8 (*)

Soit $\alpha \in]0; 1[$. On note $A = \{(x, y, z), x, y, z \geq 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$. Déterminer les extremums sur A de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \end{array}$$

Commençons par remarquer que

$$\{f(x, y, z), (x, y, z) \in A\} = \{f(x, y, 1 - x - y), x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

On est donc ramené à déterminer les extremums de l'application continue g sur le compact K définis par

$$g : (x, y) \longmapsto x^\alpha + y^\alpha + (1 - x - y)^\alpha \quad \text{et} \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur Ω de K , c'est-à-dire K privé des trois segments joignant $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \alpha (x^{\alpha-1} - (1 - x - y)^{\alpha-1}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha (y^{\alpha-1} - (1 - x - y)^{\alpha-1})$$

Les points critiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} x^{\alpha-1} = (1 - x - y)^{\alpha-1} \\ y^{\alpha-1} = (1 - x - y)^{\alpha-1} \end{cases}$$

Par injectivité de la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ sur $]0; 1[$, il s'ensuit que le seul point critique de g sur Ω est le point $(1/3, 1/3)$ avec $g(1/3, 1/3) = 3^{1-\alpha}$. Reste l'étude au bord. Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a

$$f(x, 0) = f(0, x) = f(x, 1 - x) = x^\alpha + (1 - x)^\alpha$$

On vérifie facilement que cette fonction admet son minimum en $x = 0$ et $x = 1$, lequel vaut 1, et son maximum en $x = 1/2$ qui vaut $2^{1-\alpha}$. On peut alors conclure, puisque les extremums de g sont atteints aux points critiques ou au bord du domaine. En utilisant la correspondance entre les extremums de g et ceux de f , il vient

La fonction f admet pour minimum 1 atteint aux trois points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et un maximum égal à $3^{1-\alpha}$ atteint en $(1/3, 1/3, 1/3)$.

9

Dans le plan affine euclidien, on considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de rayons R et R' , tangents extérieurement en un point U . Un point M décrit $\mathcal{C}$ tandis que qu'un point P décrit $\mathcal{C}'$. Quelle doit être la position de ces points pour obtenir un triangle UMP d'aire maximale ?

On considère un repère orthonormé $(U, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine est le point U et $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{A'A} / \left\| \overrightarrow{A'A} \right\|$ où A et A' sont les deux centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Dans ce repère, on remarque que les coordonnées de M et P sont de la forme

$$M \quad \begin{pmatrix} R + R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P \quad \begin{pmatrix} -R' + R' \cos \phi \\ R' \sin \phi \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, l'aire du triangle UMP est donnée par $\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{UP}) \right|$ soit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{UMP} &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot R' \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 + \cos \theta & -1 + \cos \phi \\ \sin \theta & \sin \phi \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot R' \cdot |\sin \phi + \cos \theta \sin \phi + \sin \theta - \sin \theta \cos \phi| \\ \mathcal{A}_{UMP} &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot R' \cdot |\sin \phi + \sin \theta + \sin(\phi - \theta)| \end{aligned}$$

Maximiser l'aire revient donc à maximiser l'application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : (\theta, \phi) \longmapsto (\sin \phi + \sin \theta + \sin(\phi - \theta))^2$$

Notons que par 2π -périodicité de $\sin$, $f(\mathbb{R}^2) = f([0; 2\pi]^2)$. Or, la fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$ donc continue sur le fermé borné $[0; \pi]^2$, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce domaine. En particulier, elle atteint son maximum qui est donc également un maximum sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc atteint en un point critique de f . Les dérivées partielles de f sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \phi) = 2(\sin \phi + \sin \theta + \sin(\phi - \theta)) \cdot (\cos \theta - \cos(\phi - \theta))$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial \phi}(\theta, \phi) = 2(\sin \phi + \sin \theta + \sin(\phi - \theta)) \cdot (\cos \phi + \cos(\phi - \theta))$$

Le point (θ, ϕ) est donc un point critique de f si et seulement si $\sin \phi + \sin \theta + \sin(\phi - \theta) = 0$, ce qui correspond à un point en lequel f s'annule donc à un minimum global, ou si

$$\begin{cases} \cos \theta - \cos(\phi - \theta) = 0 \\ \cos \phi + \cos(\phi - \theta) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos \theta = -\cos \phi \\ \cos \theta = \cos(\phi - \theta) \end{cases}$$

La première égalité assure que $\phi \equiv (\pi - \theta)[2\pi]$ ou $\phi \equiv (\pi + \theta)[2\pi]$. Dans le second cas, on a $\sin \phi + \sin \theta + \sin(\phi - \theta) = 0$ ce qui correspond à nouveau à un minimum global. Dans le premier cas,

$$\cos(\phi - \theta) = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos(2\theta)$$

Si (θ, ϕ) est un point critique, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \cos \theta = -\cos(2\theta) \quad & \text{d'où} \quad (\theta \equiv (2\theta + \pi)[2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv (\pi - 2\theta)[2\pi]) \\ & \text{soit} \quad \theta \equiv \pi[2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \end{aligned}$$

Les deux seuls cas qui ne correspondent pas à un point d'annulation de f sont ainsi

$$\left(\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{et} \quad \phi \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \right) \quad \text{ou} \quad \left(\theta \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{et} \quad \phi \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \right)$$

On peut donc conclure :

Si l'on note A le centre de $\mathcal{C}$ et A' celui de $\mathcal{C}'$, alors l'aire du triangle UMP est maximale lorsque les angles $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'P})$ mesurent respectivement $\pi/3$ et $2\pi/3$ ou bien $-\pi/3$ et $-2\pi/3$.