

I. PRÉLIMINAIRES

1 Supposons que A soit une matrice symétrique positive. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a alors

$$AX = \lambda X \quad \text{d'où} \quad {}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda\|X\|^2$$

tXAX et $\|X\|^2$ sont positifs, donc **λ est un réel positif ou nul.**

Rappelons que le produit scalaire canonique entre deux vecteurs colonnes X et Y s'exprime à l'aide du vecteur transposé :

$$(X | Y) = {}^tX Y = \sum_i x_i y_i$$

Formellement, on obtient alors une matrice réelle 1×1 que l'on identifie avec le réel qu'elle contient. On retrouve par la même occasion la relation rappelée par l'énoncé

$$(AX | Y) = {}^t(AX) Y = {}^tX {}^tA Y = (X | {}^tA Y)$$

Soit maintenant A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable par changement de base orthonormale, donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que ${}^tPAP = D$.

En toute rigueur, on ne peut parler de changement de base pour une matrice, mais uniquement pour l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. Pour le cas qui nous intéresse, cela revient à dire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que tPAP soit diagonale.

Rappelons enfin que ce résultat de diagonalisation en base orthogonale n'est vrai que pour les matrices symétriques *réelles* et est en général faux pour les matrices symétriques *complexes*.

Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A , donc, par hypothèse, ce sont des réels positifs ou nuls. De ${}^tPAP = D$, on déduit $A = PD {}^tP$, puis

$${}^tXAX = {}^tX PD {}^tP X$$

Posons $Y = {}^tP X$ et notons

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a, en remarquant que ${}^tXP = {}^t({}^tPX)$,

$${}^tXPD {}^tP X = (y_1, \dots, y_n) D \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

Cette dernière somme est positive ou nulle tout comme les λ_i , donc tXAX est un réel positif ou nul pour toute matrice colonne X . Ainsi, **A est une matrice positive.** Par conséquent,

A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives.

2 Montrons d'abord qu'une matrice définie positive est positive et inversible.

La matrice A est définie positive si et seulement si, pour toute matrice colonne X non nulle, ${}^tXAX > 0$. En particulier, A est une matrice symétrique **positive**. De plus, pour tout vecteur X non nul, AX est distinct du vecteur nul (sinon tXAX serait nul). On a donc montré que pour toute matrice colonne X , $AX = 0$ entraîne que $X = 0$. Ainsi, le noyau de A est réduit au vecteur nul et A est **inversible**.

Réciproquement, supposons A positive et inversible. D'après la question précédente, les valeurs propres de A sont positives ou nulles. Comme A est inversible, son noyau est réduit au vecteur nul et 0 n'est pas valeur propre de A . Les valeurs propres de A sont strictement positives.

Soit X un vecteur propre de A . Il est en particulier non nul. Avec les notations de la question précédente, tP étant une matrice inversible, $Y = {}^tPX$ n'est pas nul. Il existe donc un indice i pour lequel y_i est non nul. La somme $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ est alors strictement positive comme somme de termes positifs ou nuls dont l'un au moins est non nul. Ceci montre que tXAX est strictement positif pour tout vecteur X non nul et donc que A est **définie positive**. En conclusion,

A est définie positive si et seulement si A est positive et inversible.

3 D'après la question 1, si A est positive, toutes ses valeurs propres sont positives. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à éléments diagonaux positifs telle que

$$D = {}^tPAP \quad \text{soit} \quad A = PD{}^tP$$

La matrice D s'écrit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i réels positifs. On peut définir une matrice D'

$$D' = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \quad \text{vérifiant} \quad D'^2 = D$$

On a alors

$$\begin{aligned} A &= PD'^2 {}^tP \\ &= PD' {}^tP PD' {}^tP && \text{car } {}^tP P = I_n \\ \boxed{A = C^2} &&& \text{en posant } C = PD' {}^tP \end{aligned}$$

D est diagonale et de ce fait ${}^tD = D$. Ainsi,

$${}^tC = {}^t {}^tP {}^tD {}^tP = PD {}^tP = C$$

et C est **symétrique**.

Enfin, A étant définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives d'après la question 2. On en déduit que les valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ de C sont strictement positives et, toujours d'après la question 2, il en résulte que C est **définie positive**.

Si A est définie positive, il existe C symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.

4 Soit X un élément de $\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n)$,

$$CX = \sqrt{\lambda} X \quad \text{donc} \quad C^2 X = \sqrt{\lambda} CX = \lambda X$$

Par conséquent $AX = \lambda X$ et $X \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

Il s'ensuit

$$\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

D'autre part, C étant diagonalisable car symétrique réelle, la somme des dimensions des sous-espaces propres de C est égale à n , de même que la somme des sous-espaces propres de A . Désignons par $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, avec $p \leq n$, le spectre de A . Notons d_i et d'_i les dimensions de $\text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$ et $\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda_i} I_n)$. On a,

$$\sum_{i=1}^p d_i = \sum_{i=1}^p d'_i = n \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=1}^p (d_i - d'_i) = 0$$

L'inclusion précédente implique que $d_i - d'_i$ est un entier positif ou nul. La somme ne peut être nulle que s'ils sont tous nuls, donc $\text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$ et $\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda_i} I_n)$ sont de même dimension et avec l'inclusion déjà démontrée, on en conclut

$$\boxed{\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n)}$$

Il existe une autre démonstration de l'inclusion inverse utilisant un cadre géométrique plutôt que matriciel.

Prenons X dans $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$. Comme A et C commutent, on a

$$A CX = C AX = \lambda CX$$

CX appartient lui aussi à $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$, autrement dit $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est stable par C .

Géométrisons le problème. Soit a l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . Notons u la restriction à $\text{Ker}(a - \lambda \text{id})$ de l'endomorphisme c canoniquement associé à la matrice C . Elle vérifie

$$u^2 = \lambda \text{id}$$

Le polynôme scindé à racines simples $(X - \sqrt{\lambda})(X + \sqrt{\lambda})$ est annulé par u qui est donc diagonalisable. Son spectre étant positif, il est réduit à $\sqrt{\lambda}$, donc

$$u = \sqrt{\lambda} \text{id} \Big|_{\text{Ker}(a - \lambda \text{id})}$$

En revenant aux matrices, on a montré que

$$\text{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n)$$

5 L'existence a été prouvée à la question 3 : il reste à montrer l'unicité. Soit C une matrice telle que $C^2 = A$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A .

A étant une matrice symétrique, l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé est diagonalisable dans une base orthonormale de l'espace considéré.

D'après la question précédente, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est aussi une base de vecteurs propres de C , puisque les sous-espaces propres associés respectivement à $\sqrt{\lambda}$ et λ sont égaux. Si on désigne par P la matrice dont les colonnes sont exactement les vecteurs colonnes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, la matrice P est orthogonale et les matrices ${}^t P A P$ et ${}^t P C P$ sont diagonales.

C'est ce qu'il fallait comprendre par « C est diagonale ». P est en fait la matrice de passage de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Prenons C et C' vérifiant $C^2 = A = C'^2$. On peut trouver Δ et Δ' diagonales telles que

$$C = P\Delta^t P \quad \text{et} \quad C' = P\Delta'^t P$$

On obtient donc

$$\Delta^2 = \Delta'^2$$

Notons $\Delta = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $\Delta' = \text{Diag}(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mu_i^2 = \mu_i'^2$$

La positivité des coefficients de Δ et Δ' permet de conclure que $\mu_i = \mu_i'$ et donc $C = C'$.

Il existe une unique matrice symétrique définie positive telle que $C^2 = A$ et qui soit diagonale dans toute base de vecteurs propres de A .

La condition « diagonale dans toute base de vecteurs propres de A » est en fait inutile pour assurer l'unicité. Le fait que $C^2 = A$ donne que A et C commutent, et donc implique l'unicité de C positive. En cadeau, C est diagonale dans toute base propre de A .

6 Si A est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives. Elle est inversible et les valeurs propres de la matrice inverse sont les inverses des valeurs propres de A . Elles sont donc en particulier strictement positives et A^{-1} est une matrice réelle symétrique définie positive. L'existence et l'unicité de la matrice $A^{-1/2}$ telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ résulte alors directement de la question précédente.

Il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.

La symétrie de A^{-1} découle de celle de A et du fait que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

7 Soit A une matrice symétrique définie positive, λ une valeur propre de A (donc en particulier strictement positive) et X un vecteur propre associé. On a

$$\lambda X = AX \quad \text{donc} \quad A^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$$

Les valeurs propres de A et A^{-1} sont inverses les unes des autres pour les mêmes vecteurs propres. Une base orthonormale de vecteurs propres de A est donc une base orthonormale de vecteurs propres de A^{-1} ainsi que de $A^{1/2}$ et $A^{-1/2}$. Si on désigne par P une matrice de passage, on a, d'après les questions 5 et 6,

$${}^tP A^{1/2}P = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

$${}^tP A^{-1/2}P = \text{Diag}((\sqrt{\lambda_1})^{-1}, \dots, (\sqrt{\lambda_n})^{-1})$$

Il en résulte directement que

$${}^tP A^{1/2}P {}^tP A^{-1/2}P = I_n \quad \text{donc} \quad A^{1/2}A^{-1/2} = I_n$$

On montre de même que $A^{-1/2}A^{1/2} = I_n$, ce qui donne

$$(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$$

8 On sait que si deux matrices commutent, tout sous-espace propre de la première est stable par la seconde. La restriction d'un endomorphisme (ou d'une matrice) à un sous-espace stable est un endomorphisme de ce sous-espace, et la restriction d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. La restriction de B à tout sous-espace propre F de A est diagonalisable, donc il existe une base de F formée de vecteurs propres de B .

Tous ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de A , puisque F est un sous-espace propre de A , donc ne contient que des vecteurs propres de A . Il existe donc une base de F formée de vecteurs propres communs à A et B . On fait de même avec tous les sous-espaces propres. On sait que l'espace est somme directe des sous-espaces propres de A , donc d'après le théorème de la base télescopique, on obtient, par concaténation de bases, une base de E , formée de vecteurs propres communs à A et B , ce qui permet de les diagonaliser simultanément.

Ainsi, si A et B commutent, il existe une base commune de vecteurs propres. Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres. D'après la question 5, les matrices ${}^tP A^{1/2}P$ et ${}^tP B^{1/2}P$ sont diagonales. Or, deux matrices diagonales commutent toujours, donc

$${}^tP A^{1/2}P {}^tP B^{1/2}P = {}^tP B^{1/2}P {}^tP A^{1/2}P$$

d'où

$${}^tP A^{1/2}B^{1/2}P = {}^tP B^{1/2}A^{1/2}P$$

dont il résulte, puisque tP et P sont inversibles,

$$\boxed{A^{1/2}B^{1/2} = B^{1/2}A^{1/2}}$$

II. INÉGALITÉ DE KANTOROVITCH

9 Puisque $A^{-1/2}$ est symétrique, on a

$$(A^{1/2}X | A^{-1/2}X) = (A^{-1/2}A^{1/2}X | X) = (X | X)$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (A^{1/2}X | A^{-1/2}X)^2 &\leq (A^{1/2}X | A^{1/2}X) (A^{-1/2}X | A^{-1/2}X) \\ &\leq (AX | X) (A^{-1}X | X) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(X | X)^2 \leq (AX | X) (A^{-1}X | X)} \quad (2)$$

Avec des techniques similaires, on montre que

$$(X | Y) \leq (AX | Y) (A^{-1}X | Y)$$

10 Si l'inégalité précédente est une égalité, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs $A^{-1/2}X$ et $A^{1/2}X$ sont colinéaires pour tout X . On en déduit que pour toute matrice colonne X , il existe un réel λ_X , a priori dépendant de X , tel que

$$A^{1/2}X = \lambda_X A^{-1/2}X$$

En multipliant par $A^{1/2}$ à gauche, on en déduit

$$AX = \lambda_X X$$

On va montrer que λ est indépendant de X . Si X et Y sont deux vecteurs linéairement indépendants, on a

$$\begin{aligned} A_{X+Y} &= AX + AY \\ \lambda_{X+Y} (X + Y) &= \lambda_X X + \lambda_Y Y \\ (\lambda_{X+Y} - \lambda_X) X + (\lambda_{X+Y} - \lambda_Y) Y &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs étant indépendants, les coefficients devant X et Y sont nécessairement nuls et on en déduit

$$\lambda_X = \lambda_{X+Y} = \lambda_Y$$

Si X et Y sont deux vecteurs non nuls linéairement dépendants, il existe un réel non nul α tel que $X = \alpha Y$. D'où

$$\begin{aligned} AX &= \alpha AY \\ \lambda_X \alpha Y &= \alpha \lambda_Y Y \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda_X = \lambda_Y$$

λ est en fait une constante et $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}_n$.

On peut également traiter le cas des vecteurs colinéaires en utilisant celui des vecteurs non colinéaires :

- Pour $n > 1$, il existe un vecteur Z tel que (X, Z) et (Y, Z) soient des couples de vecteurs indépendants. On a alors

$$\lambda_X = \lambda_Z = \lambda_Y$$

et on conclut de même que λ est une constante.

- Pour $n = 1$, $\lambda_X = \lambda$ car les seules applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension 1 sont les homothéties.

Réciproquement, si $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}_n$, alors

$$(AX | X) = \lambda \|X\|^2$$

et

$$(A^{-1}X | X) = \frac{1}{\lambda} \|X\|^2$$

donc l'inégalité (2) est bien une **égalité** dans ce cas.

Les matrices pour lesquelles l'inégalité (2) est une égalité sont les matrices scalaires.

11 On a

$$F(A) = A^2 - (m + M)A + mM\mathbf{I}_n$$

Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, alors

$$AX = \lambda X \quad \text{donc} \quad A^2X = \lambda^2 X$$

ce qui entraîne

$$(A^2 - (m + M)A + mM\mathbf{I}_n)X = (\lambda^2 - (m + M)\lambda + mM)X$$

Donc λ valeur propre de A implique que **$F(\lambda)$ est valeur propre de $F(A)$** .

Pour la réciproque, observons que les vecteurs propres associés à la valeur propre λ pour A et $F(\lambda)$ pour $F(A)$ sont les mêmes. A est diagonalisable car symétrique réelle, donc il existe une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (distinctes ou confondues). Cette même base est base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $F(\lambda_1), \dots, F(\lambda_n)$, également distinctes ou confondues. On a une base de vecteurs propres, donc on a **toutes les valeurs propres** de la matrice $F(A)$.

Les valeurs propres de $F(A)$ sont toutes de la forme $F(\lambda)$, avec λ valeur propre de A .

12 On a

$$F(s) = (s - m)(s - M)$$

donc F a pour racines m et M . $F(s)$ est donc un réel négatif ou nul pour tout s appartenant à l'intervalle $[m; M]$. Toutes les valeurs propres λ_i de A appartenant à cet intervalle, tous les réels $F(\lambda_i)$ sont négatifs ou nuls.

Les valeurs propres de $F(A)$ sont négatives ou nulles.

13 La matrice N , définie par

$$N = -(A - (m + M)I_n + mMA^{-1})$$

est une combinaison linéaire de matrices symétriques, donc est elle-même symétrique.

Par un calcul direct, on a que $NA = AN$, donc

$${}^tNA = {}^tA {}^tN = AN = NA$$

et NA est une matrice symétrique.

Comme $NA = -F(A)$, ses valeurs propres sont positives ou nulles, ce qui montre que NA est une matrice symétrique positive d'après la question 1. Comme on l'a vu à la question 8, le fait que N et A commutent implique qu'elles sont simultanément diagonalisables. Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$P^{-1}NP = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

et

$$P^{-1}NAP = \text{Diag}(\alpha_1\lambda_1, \dots, \alpha_n\lambda_n)$$

Les produits $\alpha_i\lambda_i$ sont positifs puisque NA est symétrique positive, les réels λ_i sont strictement positifs puisque A est symétrique définie positive, donc les réels α_i sont positifs et il découle de la question 1 que la matrice N est positive. Ainsi,

La matrice N est symétrique positive.

On aurait aussi pu voir directement que $N = A^{-1}F(A)$, donc

$$N = P \begin{pmatrix} -\frac{F(\lambda_1)}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F(\lambda_n)}{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP$$

Puisque les λ_i sont tous strictement positifs et les $F(\lambda_i)$ tous négatifs (voir question 12), les valeurs propres de N sont toutes positives et N est positive.

De plus, comme P est une matrice orthogonale, on a

$${}^tN = {}^tP \operatorname{Diag} \left(\frac{F(\lambda_1)}{\lambda_1}, \dots, \frac{F(\lambda_n)}{\lambda_n} \right) {}^tP = N$$

et N est symétrique.

14 On a
$$f(0) = mM (A^{-1}X | X)$$

qui est un réel positif puisque A^{-1} est, comme A , une matrice symétrique définie positive. On remarque que

$$-(NX | X) = (AX | X) - (m + M) (X | X) + mM (A^{-1}X | X) = f(1)$$

qui est un réel négatif puisque d'après la question précédente N est une matrice symétrique positive. Par conséquent

$$f(0) f(1) \leq 0$$

15 La fonction f est un polynôme donc elle est en particulier continue. Elle est strictement positive en 0 et négative ou nulle en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois sur $]0; 1]$. $f(s) = 0$ est une équation du second degré qui admet une racine réelle au moins, il s'ensuit que son discriminant est positif ou nul, c'est-à-dire

$$(m + M)^2 (X | X)^2 - 4mM (AX | X) (A^{-1}X | X) \geq 0$$

En notant que $4mM$ est un réel strictement positif, on obtient bien

$$(AX | X) (A^{-1}X | X) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM} (X | X)^2 \quad (3)$$

16 Calculons

$$\frac{(m + M)^2}{mM} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} = \frac{\lambda_1 \lambda_n (m + M)^2 - mM (\lambda_1 + \lambda_n)^2}{mM \lambda_1 \lambda_n}$$

qui est du signe de

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_n (m + M)^2 - mM (\lambda_1 + \lambda_n)^2 &= \lambda_1 \lambda_n (m^2 + 2mM + M^2) \\ &\quad - mM (\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_n + \lambda_n^2) \\ &= \lambda_1 \lambda_n (m^2 + M^2) - mM (\lambda_1^2 + \lambda_n^2) \\ &= \lambda_1 \lambda_n m^2 - mM \lambda_n^2 + \lambda_1 \lambda_n M^2 - mM \lambda_1^2 \\ &= \lambda_n m (\lambda_1 m - \lambda_n M) + \lambda_1 M (\lambda_n M - \lambda_1 m) \\ \lambda_1 \lambda_n (m + M)^2 - mM (\lambda_1 + \lambda_n)^2 &= (\lambda_1 M - \lambda_n m) (\lambda_n M - \lambda_1 m) \end{aligned}$$

Comme à la fois $\begin{cases} \lambda_n \geq \lambda_1 > 0 \\ M \geq m > 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} M \geq \lambda_n > 0 \\ \lambda_1 \geq m > 0 \end{cases}$

on en déduit $\lambda_n M \geq \lambda_1 m$ et $\lambda_1 M \geq \lambda_n m$

Par conséquent, $\forall (m, M) \in \mathcal{D} \quad \frac{(m + M)^2}{mM} \geq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$

Il y a égalité si $m = \lambda_1$ et $M = \lambda_n$, d'où

$$\inf_{\mathcal{D}} \frac{(m + M)^2}{mM} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$$

17 A n'étant pas une homothétie, λ_1 est différent de λ_n . X_1 et X_n sont alors des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique. On sait que de tels vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire que $(X_1 | X_n) = 0$. Par ailleurs, n'oublions pas que par hypothèse $\|X_1\| = \|X_n\| = 1$ et calculons

$$\begin{aligned} (AX | X) (A^{-1}X | X) &= (\lambda_1 X_1 + \lambda_n X_n | X_1 + X_n) \left(\frac{1}{\lambda_1} X_1 + \frac{1}{\lambda_n} X_n \middle| X_1 + X_n \right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_n) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n} \right) \\ (AX | X) (A^{-1}X | X) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} \end{aligned}$$

D'autre part $(X | X) = \|X_1\|^2 + \|X_n\|^2 = 2$ d'où $(X | X)^2 = 4$

Par conséquent,
$$(AX | X) (A^{-1}X | X) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4 \lambda_1 \lambda_n} (X | X)^2$$

18 L'inégalité de la question 16 donne, en passant à la borne inférieure sur m et M ,

$$(AX | X) (A^{-1}X | X) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4 \lambda_1 \lambda_n} (X | X)^2$$

On a vu à la question précédente qu'il existe au moins un vecteur pour lequel l'inégalité est une égalité. Ainsi,

L'inégalité **(3)** est la meilleur possible, il n'existe pas d'inégalité plus fine.

III. INÉGALITÉ DE PÓLYA-SZEGÖ

19 Les matrices A_1 et A_2 commutent donc sont simultanément diagonalisables (cf. question 8). Les valeurs propres de la matrice produit sont les produits des valeurs propres. Si λ est une valeur propre de $A_1 A_2^{-1}$, $\lambda = a/b$ où a est une valeur propre de A_1 et b une valeur propre de A_2 . On a alors

$$\frac{m_1}{M_2} \leq \lambda \leq \frac{M_1}{m_2}$$

En appliquant les questions 15 et 16, on obtient

$$\alpha = \frac{\frac{m_1}{M_2} + \frac{M_1}{m_2}}{\frac{m_1 M_1}{M_2 m_2}} = \frac{m_1 m_2 + M_1 M_2}{m_1 M_1}$$

20 On peut réécrire la quantité recherchée en fonction de $D^{1/2}$

$$(D(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) = (D^{1/2}(A_1 A_2)^{1/2} X | D^{1/2}(A_1 A_2)^{1/2} X)$$

Il faut alors calculer $(A_1 A_2^{-1})^{1/2} (A_1 A_2)^{1/2}$ en utilisant le fait que les matrices et donc leurs racines commutent (voir la question 8),

$$(A_1 A_2^{-1})^{1/2} (A_1 A_2)^{1/2} = A_1^{1/2} A_1^{1/2} A_2^{-1/2} A_2^{1/2} = A_1$$

Par conséquent
$$(D(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) = (A_1 X | A_1 X)$$

21 On a vu à la question précédente que

$$(A_1 X | A_1 X) = (D(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X)$$

et de même $(A_2 X | A_2 X) = (D^{-1}(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X)$

On a donc

$$(A_1 X | A_1 X) (A_2 X | A_2 X) = (D(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) (D^{-1}(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X)$$

En appliquant la question 19, on obtient l'inégalité

$$(D(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) (D^{-1}(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) \leq \alpha ((A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X)^2$$

$$\text{Or, } ((A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) = (A_2^{1/2} X | A_1 A_2^{1/2} X)$$

par propriété du produit scalaire

$$= (A_2^{1/2} X | A_2^{1/2} A_1 X) \text{ par commutativité}$$

$$((A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X) = (A_2 X | A_1 X)$$

Au final,

$$(A_1 X | A_1 X) (A_2 X | A_2 X) \leq \alpha (A_2 X | A_1 X)^2$$

22 Posons $A_1 = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $A_2 = \text{Diag}(b_1, \dots, b_n)$ avec

$$0 < a_1 \leq \dots \leq a_n \quad \text{et} \quad 0 < b_1 \leq \dots \leq b_n$$

A_1 et A_2 sont des matrices symétriques réelles définies positives puisque leurs valeurs propres sont toutes strictement positives (voir la question 1) et, d'après la question 19,

$$\alpha = \frac{a_n b_n + a_1 b_1}{4 a_1 b_1 a_n b_n}$$

Prenons $X = {}^t(1, \dots, 1)$, on a alors

$$(A_1 X | A_1 X) = \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad (A_2 X | A_2 X) = \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad \text{et} \quad (A_2 X | A_1 X) = \sum_{k=1}^n b_k a_k$$

L'inégalité démontrée à la question 21 s'écrit alors

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \frac{a_n b_n + a_1 b_1}{4 a_1 b_1 a_n b_n} \left(\sum_{k=1}^n b_k a_k \right)^2$$

d'où l'on déduit directement un côté de l'inégalité (1). L'autre côté est simplement une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{k=1}^n b_k a_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

On a donc bien

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n b_k a_k \right)^2} \leq \frac{a_n b_n + a_1 b_1}{4 a_1 b_1 a_n b_n} \quad (1)$$