

Valeurs propres, vecteurs propres

1 _____ (*) _____

Pour tout réel $x \in [-1; 1]$, on note φ_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice respectivement à la base canonique est

$$A_x = \begin{pmatrix} x^2 & x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & 1-x^2 & -x \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \end{pmatrix}$$

- (a). Calculer la trace et le déterminant de la matrice A_x .
- (b). Montrer pour tout $x \in [-1; 1]$, 1 est une valeur propre de A_x .
- (c). Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_x .
- (d). Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme φ_x .

2 _____ (*) _____

Soit $n \geq 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; 2n+1 \rrbracket}$ définie par

$$\forall i, j \in \llbracket 1; 2n+1 \rrbracket, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 _____ (**) _____

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

4 _____ (*) _____

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. On pose $f = u + v$. Montrer que toute valeur propre de v est valeur propre de f .

5 _____ (**) _____

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E . On suppose qu'il existe deux complexes α et β tels que

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$$

Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre en commun.

6 _____ (**) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $L \neq 0$ telle que

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

En exprimant A^n en fonction du terme général de la suite ci-dessus, montrer que 1 est valeur propre de A .

Diagonalisabilité

7 _____ (*) _____

Soient α, β et m trois réels. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & -1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

A quelle condition sur m, α et β ces matrices sont-elles semblables ?

8 _____ (**) _____

Soient $a_1, \dots, a_{n-1}$ et $b_1, \dots, b_{n-1}$ des complexes. A quelle condition la matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

9 _____ (*) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. La matrice B définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

10 _____ (***) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B la matrice définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$. A quelle condition sur A cette matrice est-elle diagonalisable ?

11 _____ (*) _____

Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto (X^2 - 1)P'' + 3XP' \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ et que l'endomorphisme induit par φ sur ce sous-espace vectoriel est un endomorphisme diagonalisable.

12 _____ (**) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

- (i) u est diagonalisable.
- (ii) Le polynôme caractéristique de u est scindé et tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u .

13 _____ (**) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit alors

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g &\longmapsto f \circ g - g \circ f \end{aligned}$$

- (a). Montrer que si f est diagonalisable, alors φ_f l'est également.
- (b). Soit α une valeur propre non nulle de φ_f et g un vecteur propre associé. Calculer $(\varphi_f)(g^n)$ pour tout entier n et en déduire que g est nécessairement nilpotent.

14 _____ (*) _____ **Mines PC 2010**

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ défini par

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix}$$

Montrer que 1 est valeur propre et déterminer l'espace propre associé. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Equations matricielles

15 _____ (**) _____

Déterminer les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16 _____ (**) _____ **X PC 2013**

Déterminer les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation $X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Divers

17 _____ (**) _____

Déterminer une matrice réelle diagonale par blocs semblable à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18 _____ (**) _____

Pour toute matrice A , on note $C(A)$ le commutant de A , c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

(a). Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b). Déterminer les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A .

(c). Montrer que $C(A)$ est de dimension 3 et que $C(A) = \mathbb{R}[A]$.

19 _____ (**) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_p$

Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de projection que l'on déterminera en fonction de A .

20 _____ (**) _____

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = (b_n + 3c_n)/4 \\ b_{n+1} = (c_n + 3a_n)/4 \\ c_{n+1} = (a_n + 3b_n)/4 \end{cases}$$

A quelle condition sur a_0, b_0, c_0 ces suites sont-elles convergentes? Si oui, quelles sont leurs limites respectives?

21 _____ (*) _____ **CCP PC 2008**

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u(x)|x) = 0$ pour tout vecteur x .

(a). Montrer que le spectre de u est inclus dans $\{0\}$.

(b). Montrer que $(u(x)|y) = -(x|u(y))$ pour tous x, y dans E .

(c). Montrer que $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$.

(d). Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$.

(i) Montrer que v est bijectif.

(ii) Montrer que le polynôme caractéristique de v n'a pas de racines réelles.

(iii) Montrer que le rang de u est pair.

(e). Soit $a \in \mathbb{R}^3$. On définit
$$u_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$x \longmapsto a \wedge x$$

(i) Déterminer une relation entre $(u_a(x)|y)$ et $(x|u_a(y))$.

(ii) Déterminer le rang de u_a .

22 _____ (**) _____

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $f^3 = 2f^2 - f$.

(a) Montrer que si f est diagonalisable, alors f est un projecteur.

On suppose pour la suite que f est de rang 2.

(b) Montrer que 1 est valeur propre de f .

(c) Montrer que $\mathbb{C}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } (f - I_d)^2$.

(d) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle f admet une matrice par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad I_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

23 _____ (**) _____ **X PC 2010**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si la trace de A est nulle.

24 _____ (**) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme diagonalisable de E . Pour tout $x \in E$, on note U_x le sous-espace vectoriel engendré par $\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$.

(a). Déterminer une base de U_x .

(b). A quelle condition portant sur les valeurs propres de u existe-t-il un élément x de E tel que $U_x = E$?

25 _____ (***) _____ **X PC 2013**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ deux à deux distincts tels que $A + \lambda_i B$ soit nilpotente pour tout $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Montrer que A et B sont nilpotentes.

26 _____ (*) _____ **Mines PC 2013**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$.

(a). Comparer la trace de u et celle de v .

(b). On suppose v diagonalisable. L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

- 1** (b) On pourra déterminer le rang de $A_x - I_3$.
- 2** On pourra commencer par raisonner sur le rang de A et utiliser la trace des matrices A et A^2 .
- 3** Si P est inversible, c'est immédiat car alors A et B sont semblables. Dans le cas général, on pourra écrire que $P = U J_r V$ avec U, V inversibles et J_r diagonale dont les r premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 pour se ramener au cas où P est égale à J_r et utiliser le produit par blocs.
- 4** Raisonner à l'aide d'un endomorphisme induit sur un sous-espace propre.
- 5** Dans le cas $\alpha = \beta = 0$, raisonner de l'induit par g sur un sous-espace propre de f .
Si $\beta \neq 0$, on pourra se ramener au cas $\alpha = 0$ puis montrer à l'aide de la trace que g ne peut pas être inversible. Vérifier alors la stabilité de $\text{Ker } g$ par f .
- 6** Montrer par unicité de la limite que $L(A - I_p) = 0$.
- 7** Déterminer le spectre de A .
- 8** Raisonner à l'aide du rang de A et utiliser la trace des matrices A et A^2 .
- 9** Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, puis s'inspirer de sa diagonalisation en travaillant par blocs.
- 10** Considérer le système $B^t(X; Y) = \lambda^t(X; Y)$ et en notant λ^2 un élément du spectre de A , comparer les dimensions de $E_B(\lambda)$, $E_B(-\lambda)$ et $E_B(\lambda^2)$.
- 11** Introduire la matrice de f dans la base canonique.
- 12** On pourra utiliser le théorème de la base incomplète pour le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) et raisonner par l'absurde pour la réciproque (la somme des espaces propres est alors distincte de E).
- 13** (a) On pourra considérer une base de E constituée de vecteurs propres pour f et exprimer la matrice de $\varphi(g)$ dans cette base en fonction de celle de g .
(b) Utiliser le fait qu'un endomorphisme en dimension finie a un nombre fini de valeurs propres.
- 14** Fixer $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque, et déterminer l'ensemble des matrices M telles que $\varphi(M) = \lambda M$ en discutant suivant les valeurs de λ .
- 15** Raisonner sur les endomorphismes associés en utilisant notamment le fait qu'une racine carrée de f commute avec f et laisse donc stable les sous-espaces propres.
- 16** Justifier qu'une solution X commute avec la matrice de droite et qu'elle laisse stable ses sous-espaces propres.
- 17** Commencer par diagonaliser A dans $\mathbb{C}$ puis utiliser les parties réelles et imaginaires des vecteurs trouvés.
- 18** (a) Si f est l'endomorphisme associé à A , construire une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit T .
(b) Si π est un plan stable, considérer l'endomorphisme g induit sur π et son polynôme caractéristique.
(c) Raisonner sur les endomorphismes associés en utilisant $E_1(f)$, $E_3(f)$ et $\text{Ker}(f - I_d)^3$.
- 19** Utiliser un polynôme annulateur et une division euclidienne pour exprimer A^n en fonction de I_n, A, A^2 .
- 20** Noter $X_n = {}^t(a_n, b_n, c_n)$ et établir une relation matricielle simple entre X_{n+1} et X_n .
- 22** (a) Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{0, 1\}$.
(b) Comparer pour l'inclusion les espaces $\text{Im}(f - I_d)^2$ et $\text{Ker } f$. En déduire que $\det(f - I_d) = 0$.
(c) Utiliser le théorème du rang et l'inclusion du (b).
(d) Discuter suivant la valeur de $\dim \text{Ker}(f - I_d)$.
- 23** On pourra se ramener au cas où A est diagonale ou triangulaire supérieure non diagonalisable.
- 24** (a) Introduire k_0 , plus petit entier k tel que $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est libre.
(b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante est que u admette n valeurs propres distinctes. On pourra remarquer que $U_x = E$ si et seulement si $(x, u(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$ est une base de E .
- 25** Introduire l'application $\varphi : \lambda \mapsto \det(X I_n - (A + \lambda B))$ et justifier que l'on peut écrire

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) X + \dots + P_n(\lambda) X^n$$
 où $P_0, \dots, P_n$ sont des polynômes de degré au plus n .
- 26** (b). Penser à un endomorphisme nilpotent d'ordre 2.