

1 _____ (*) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

La suite est-elle convergente ?

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les sommes partielles de la série harmonique définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On sait que $H_n \sim \ln n$ donc $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente (elle tend vers $+\infty$). Cependant, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$H_{n+p} - H_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \quad \text{d'où} \quad 0 \leq H_{n+p} - H_n \leq \frac{p}{n+1}$$

Cette majoration prouve que $(H_{n+p} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, ce qui est la signification de l'hypothèse de l'énoncé. Par conséquent,

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement convergente lorsqu'elle satisfait

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$$

2 _____ (**) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexe convergente vers ℓ . Pour tout entier n , on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Pour tout entier n , on a
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (\star)$$

d'où
$$v_n - \ell = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (u_k - \ell)$$

Fixons $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq N$, on ait $|u_k - \ell| \leq \epsilon/2$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |u_k - \ell| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} \frac{\epsilon}{2}$$

Notons que d'après $(\star)$, la somme de termes positifs $\sum_{k=N}^n \binom{n}{k}$ est majorée par 2^n . Remarquons ensuite que pour tout k **fixé**,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(n^k)$$

La quantité $\sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |u_k - \ell|$ est donc polynomiale en n , donc négligeable devant 2^n par croissance comparée. Il existe donc un rang N' tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |u_k - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et alors pour tout $n \geq \max(N, N')$,
$$|v_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Le réel ϵ ayant été choisi arbitrairement,

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

3 _____ (*) _____

Etudier la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + \sin u_n \end{cases}$$

Il est clair que si u_0 est de la forme $k\pi$ pour un certain entier k , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, donc convergente. Supposons donc u_0/π non entier et notons p sa partie entière, puis $I_p =]p\pi; (p+1)\pi[$.

La fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ est dérivable, de dérivée $f' : x \mapsto 1 + \cos x$ positive, donc f est croissante. Par conséquent, pour tout $x \in I_p$,

$$f(p\pi) < f(x) < f((p+1)\pi) \quad \text{soit} \quad p\pi < f(x) < (p+1)\pi$$

Cela justifie la stabilité de I_p par f , et donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans I_p . Pour la suite, on distingue deux cas suivant la parité de p .

- Si p est pair, alors $f(x) > x$ sur I_p donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, et ne peut tendre que vers un point fixe de f appartenant à $[u_0; (p+1)\pi]$ donc nécessairement $(p+1)\pi$.
- Si p est impair, alors $f(x) < x$ sur I_p d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite $p\pi$.

Pour conclure,

Si u_0/π est entier, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Sinon, u_0 appartient à un unique intervalle de la forme $[p\pi; (p+1)\pi]$ et converge vers $(p+1)\pi$ si p est pair et $p\pi$ sinon.

4 _____ (***) _____

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 - x_n}$

Déterminer la nature de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $f : x \mapsto x^2/(1-x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec pour tout $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\swarrow$	$-\infty$
		0		-4	
				$\swarrow$	$-\infty$

Notons alors les inclusions suivantes à partir de ces variations :

$$f(]1; +\infty[) \subset]-\infty; -4] \quad \text{et} \quad f(]-\infty; -4]) \subset [f(-4); +\infty[= [16/5; +\infty[$$

On en déduit notamment que l'intervalle $]1; +\infty[$ est stable par $f \circ f$. Cela permet de s'assurer que la suite $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]1; +\infty[$, tandis que $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]-\infty; -4]$. En particulier, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Étudions maintenant la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $y_n = x_{2n}$ pour tout entier n . Alors, $y_{n+1} = (f \circ f)(y_n)$ pour tout entier n . Remarquons que pour tout $x > 1$,

$$f(f(x)) = \frac{f(x)^2}{1 - f(x)} = \frac{x^4}{(1-x)(1-x-x^2)} \quad \text{puis} \quad f(f(x)) - x = \frac{x(2x-1)}{(1-x)(1-x-x^2)}$$

On vérifie aussitôt que $f(f(x)) > x$ sur $]1; +\infty[$, ce qui prouve en l'appliquant en y_n que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Elle ne peut converger que vers un point fixe de $f \circ f$, c'est-à-dire 0 ou $1/2$ en vertu du calcul ci-dessus. Mais puisque elle est à valeurs dans $]1; +\infty[$, elle ne peut converger vers ces valeurs. Ainsi, elle tend vers $+\infty$. En appliquant f , il vient que $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Les suites extraites $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. En particulier, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Pour obtenir un équivalent, utilisons l'indication. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1}^2 - y_n^2 = \frac{y_n^8}{(1-y_n)^2(1-y_n-y_n^2)^2} - y_n^2 = \frac{(2y_n-1)(2y_n^3-2y_n+1)y_n^2}{(1-y_n)^2(1-y_n-y_n^2)^2}$$

Puisque y_n tend vers $+\infty$, on en déduit que $y_{n+1}^2 - y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$

puis d'après Césàro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}^2 - y_k^2 = \frac{1}{n} (y_n^2 - y_0^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$$

Par télescopage, on en déduit que y_n^2/n converge vers 4 et donc $x_{2n} = y_n \sim 2\sqrt{n}$. En appliquant la fonction f , il vient que l'équivalent pour $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ devient $x_{2n+1} \sim -2\sqrt{n}$.

$$x_{2n} \sim 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad x_{2n+1} \sim -2\sqrt{n}$$

5 _____ (**) _____

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$0 < a_0 < b_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} \end{cases}$$

- (a). Montrer que les deux suites convergent vers la même limite.
 (b). On pose $\alpha = \arccos(a_0/b_0)$. Exprimer la limite de ces deux suites en fonction de α et b_0 .

- (a) Il est clair que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Dès lors, pour tout entier n ,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \sqrt{a_{n+1}/b_n} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2b_n}}$$

Puisque $a_0 < b_0$, cette relation assure par récurrence immédiate que $a_n < b_n$ pour tout entier n . Par conséquent,

$$a_{n+1} - a_n = (b_n - a_n)/2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{a_{n+1}/b_n} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2b_n}} \leq 1$$

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc respectivement décroissante et croissante. Il s'ensuit a_0 minore b tandis que b_0 majore a . Les suites étant monotones et bornées, elles convergent.

Reste à montrer l'égalité des limites. En notant ℓ_a et ℓ_b les limites, on obtient directement $\ell_a = \ell_b$ par passage à la limite dans l'expression de a_{n+1} .

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limites.

- (b) Par définition, $a_0 = b_0 \cos \alpha$ et α appartient à $]0; \pi/2[$ en tant qu'image réciproque par $\cos$ d'un réel de $]0; 1[$. On calcule alors grâce aux formules trigonométriques

$$a_1 = b_0 \cos^2(\alpha/2) \quad b_1 = b_0 \cos(\alpha/2) \quad a_2 = b_0 \cos(\alpha/2) \cos^2(\alpha/4) \quad b_1 = b_0 \cos(\alpha/2) \cos(\alpha/4)$$

puis par récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = b_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n = b_0 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

La relation $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ permet de faire apparaître un produit télescopique (les quantités $\sin(\alpha/2^k)$ sont non nulles car $\alpha/2^k$ est dans $]0; \pi/2[$). Après simplification, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = b_0 \frac{\sin \alpha}{2^n \sin(\alpha/2^n)}$$

L'équivalent $\sin x \sim x$ en 0 permet d'en déduire pour finir la limite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La limite commune des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $b_0(\sin \alpha)/\alpha$.

6 _____ (***) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in]-1; 1[$. On définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = av_n + u_n$$

Etudier la nature de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donner sa limite éventuelle.

En divisant la relation de récurrence par a^n , il vient pour tout entier n

$$\frac{v_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{v_n}{a^n} + \frac{u_n}{a^{n+1}} \quad \text{soit} \quad \frac{v_{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{v_n}{a^n} = \frac{u_n}{a^{n+1}}$$

Pour tout $N \geq 1$, on obtient en sommant cette égalité de 0 à $N - 1$

$$\frac{v_N}{a^N} - v_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{u_k}{a^{k+1}} \quad \text{soit} \quad v_N = u_0 a^N + \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-k-1} u_k$$

Notons $u_n = \lambda + x_n$ pour tout entier n de sorte que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de limite nulle. Alors,

$$v_N = u_0 a^N + \lambda \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} + \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} x_k \quad (*)$$

La quantité $u_0 \cdot a^N$ converge vers 0. Après changement d'indice,

$$\lambda \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} = \lambda \sum_{p=0}^{N-1} a^p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{1-a}$$

Reste à déterminer le comportement du troisième terme. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que $|x_n| \leq \epsilon$ pour $n \geq n_0$. Ainsi, pour $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} x_k \right| \leq a^{N-1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |a|^{-k} |x_k| + \epsilon \sum_{k=0}^{N-1} |a|^{N-1-k}$$

Le premier membre de la majoration est une constante multipliée par a^N , donc il est inférieur à ϵ pour N assez grand. Le second est à nouveau la somme des termes d'une suite géométrique positive, donc majorée par $\epsilon/(1-|a|)$. Au final, pour N assez grand,

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} x_k \right| \leq \epsilon + \frac{\epsilon}{1-|a|} = \epsilon \frac{2-|a|}{1-|a|}$$

Ceci étant vrai quel que soit $\epsilon > 0$, le troisième membre de (*) est de limite nulle. Par suite,

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda/(1-a)$.

7

(**)

- (a). Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $e^x = x^n$ admet exactement deux solutions strictement positives $u_n < v_n$.
- (b). Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $u_n < n < v_n$.
- (c). Etudier les limites éventuelles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes :

$$e^x = x^n \quad \Longleftrightarrow \quad x = n \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}$$

Une étude rapide de $f : x \mapsto \ln x/x$ montre que f est strictement croissante sur $]0; e]$ puis strictement décroissante sur $]e; +\infty[$ avec

$$f([0; e]) =]-\infty; 1/e] \quad \text{et} \quad f([e; +\infty]) = [0; 1/e[$$

Enfin, $1/n \leq e$ lorsque $n \geq 3$. La stricte monotonie de f sur les deux intervalles ci-dessus combinée au théorème des valeurs intermédiaires assure le résultat (et même un peu plus).

Pour tout $n \geq 3$, l'équation $e^x = x^n$ admet une unique solution sur chaque intervalle $]0; e[$ et $]e; +\infty[$.

- (a). La majoration $u_n < n$ est évidente car $u_n < e$ d'après ce qui précède. Pour la minoration de v_n , il suffit de vérifier que $f(n) > 1/n$ d'après les variations de f sur $]e; +\infty[$. Or, il s'avère que

$$f(n) = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$$

ce qui valide le résultat.

$\forall n \geq 3, \quad u_n < n < v_n$

- (b). D'après le résultat précédent, il est clair que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notons g la réciproque de la restriction de f à $]0; e[$. Par définition, $f(u_n) = 1/n$ donc $u_n = g(1/n)$. La fonction g est continue, et même $\mathcal{C}^\infty$ comme réciproque d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée est strictement positive. En particulier, g est continue en 0. Enfin, $f(1) = 0$ donc $g(0) = 1$ et ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent respectivement vers 1 et $+\infty$.

Remarque : Dès lors que g est $\mathcal{C}^\infty$, on a développement asymptotique à tout ordre $p \in \mathbb{N}$

$$u_n = g(1/n) = g(0) + \frac{g'(0)}{n} + \frac{g''(0)}{2n^2} + \cdots + \frac{g^{(p)}(0)}{p!n^p} + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

Or, $g'(0) = 1/f'(1) = 1$ d'après l'expression de la dérivée d'une réciproque. D'où notamment l'équivalent $u_n \sim 1/n$.

8 _____ (*) _____

Montrer que l'équation $x - e^{-x} = n$ a une unique solution x_n pour tout entier n . Donner un équivalent simple de x_n , puis un développement asymptotique à deux termes lorsque n tend vers $+\infty$.

L'application $f : x \mapsto x - e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto 1 + e^{-x}$ strictement positive. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers son image par f . Or, f admet pour limites $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$ donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi, tout réel y admet un unique antécédent par f . Notamment,

Pour tout entier n , l'équation $x - e^{-x} = n$ admet une unique solution.

Par définition,
$$x_n = n + e^{-x_n} \geq n \quad (*)$$

On en déduit donc par minoration que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La relation $(*)$ s'écrit alors

$$x_n = n + o(1) \quad \text{d'où} \quad x_n \sim n$$

Notons maintenant $x_n = n + y_n$ avec $y_n = o(1)$ d'après ce qui précède. La relation $(*)$ se réécrit

$$y_n = e^{-x_n} = e^{-(n+y_n)} = e^{-n} e^{-y_n}$$

Puisque $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, le terme e^{-y_n} tend vers 1 et ainsi $y_n \sim e^{-n}$. On peut donc conclure

$$x_n = n + e^{-n} + o(e^{-n})$$

9 _____ (***) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle et telle que $u_n + u_{2n} \sim 3/(2n)$. Montrer que $u_n \sim 1/n$. Donner un contre-exemple lorsque $u_n + u_{n+1} \sim 2/n$.

Notons $v_n = u_n - 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Alors,

$$v_n + v_{2n} = u_n + u_{2n} - \frac{3}{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On souhaite montrer que $u_n \sim 1/n$, soit que $v_n = o(1/n)$. Fixons $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |v_n + v_{2n}| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

Considérons maintenant $n \geq n_0$. Pour tout entier p , on a

$$v_n = (v_n + v_{2n}) - (v_{2n} + v_{4n}) + \cdots + (-1)^{p-1} (v_{2^{p-1}n} + v_{2^p n}) + (-1)^p v_{2^p n}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad |v_n| &\leq |v_n + v_{2n}| + |v_{2n} + v_{4n}| + \cdots + |v_{2^{p-1}n} + v_{2^p n}| + |v_{2^p n}| \\ &\leq \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{2n} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^{p-1}n} + |v_{2^p n}| \end{aligned}$$

Cette majoration étant valable pour tout entier p , on peut faire tendre p vers $+\infty$ grâce à l'hypothèse de limite nulle de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ce faisant, on obtient

$$|v_n| \leq \frac{\epsilon}{n} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{2\epsilon}{n}$$

Cette domination étant valable pour tout $n \geq n_0$, et ϵ ayant été pris arbitraire, on a bien démontré que $v_n = o(1/n)$, et ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Le résultat n'est plus valable lorsque $u_n + u_{n+1} \sim 2/n$. Considérons

$$u_n = \begin{cases} 2/n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{de sorte que} \quad u_n + u_{n+1} = \begin{cases} 2/n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2/(n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien $u_n + u_{n+1} \sim 2/n$ mais la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a ses suites extraites de termes pairs et impairs constantes de valeurs différentes 0 et 2 donc ne converge pas vers 1. Ainsi,

On peut avoir $u_n + u_{n+1} \sim 2/n$ sans que $u_n \sim 1/n$.

10 _____ (***) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que pour tout n , $u_{n+2} \leq (u_n + u_{n+1})/2$. Montrer qu'elle converge.

Pour tout entier n , on note $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$. Alors, par définition,

$$u_{n+1} \leq \max(u_n, u_{n+1}) \leq v_n$$

Or, par hypothèse,

$$u_{n+2} \leq \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \max(u_n, u_{n+1}) = v_n$$

Par suite,

$$v_{n+1} = \max(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq v_n$$

On vient donc de justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Puisqu'elle est positive (car u l'est), elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - \ell| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Prenons $n \geq N + 1$. On distingue deux cas :

- Si $u_n \geq u_{n+1}$, alors $u_n = v_n$ et donc $|u_n - \ell| \leq \epsilon$.
- Sinon, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_n = u_{n+1}$. De plus,

$$u_{n+1} \leq \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \quad \text{d'où} \quad u_{n-1} \geq 2u_{n+1} - u_n \geq u_n$$

Il s'ensuit que $u_{n-1} = v_{n-1}$ et l'encadrement

$$2u_{n+1} - u_{n-1} \leq u_n \leq u_{n+1} \quad \text{devient} \quad 2v_{n+1} - v_{n-1} \leq u_n \leq v_{n+1}$$

Et alors puisque $|v_n - \ell| \leq \epsilon$ et $|v_{n+1} - \ell| \leq \epsilon$ par définition de N , il vient

$$2(\ell - \epsilon) - (\ell + \epsilon) \leq u_n \leq \ell + \epsilon \quad \text{puis} \quad |u_n - \ell| \leq 3\epsilon$$

Dans les deux cas, on a $|u_n - \ell| \leq 3\epsilon$ pour tout $n \geq N + 1$. Le réel ϵ ayant été choisi arbitraire,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

11 _____ (*) _____

Nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + a} \right)$ avec $a > 0$?

En factorisant chaque terme du quotient par $\sqrt{n}$, la quantité u_n peut se réécrire sous la forme

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)$$

Cela permet d'obtenir le développement asymptotique suivant

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$$

soit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{a+1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / \sqrt{n}$ converge d'après le critère de convergence des séries alternées. Si l'on note $w_n = u_n - (-1)^n / \sqrt{n}$, ce qui précède donne l'équivalent $w_n \sim -(a+1)/2n$. On a donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ positive à partir d'un certain rang, et la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ diverge d'après le critère de Riemann. La quantité u_n est somme de deux termes généraux de séries respectivement convergente et divergente. Par conséquent,

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Remarque : Si l'on s'autorise à avoir $a \leq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est plus définie qu'à partir d'un certain rang, et la série converge si et seulement $a = -1$.

12 _____ (*) _____

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}}$?

Il est clair que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives. Dès lors, pour tout entier n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n+1)! \cdot (2n+2)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!}$$

soit après simplifications
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{16}{27}$$

La règle de d'Alembert permet de conclure aussitôt. Puisque $16/27 < 1$,

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

13

(**)

Nature de la série de terme général $u_n = (\cos(1/n))^{n^\alpha}$?

Commençons par écrire que

$$u_n = e^{n^\alpha \ln \cos(1/n)} = \exp \left(n^\alpha \ln \left(1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \right)$$

et donc

$$u_n = \exp \left(-\frac{1}{2} n^{\alpha-2} + O(n^{\alpha-4}) \right)$$

On distingue trois cas

- Si $\alpha < 2$, alors le terme dans l'exponentielle est équivalent à $-n^{\alpha-2}/2$ donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 2$, alors on a de la même manière que u_n tend vers $e^{-1/2}$ donc il y a à nouveau divergence grossière.
- Si $\alpha > 2$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle ce qui est insuffisant pour conclure. Mais on a de plus

$$n^2 u_n = \exp(2 \ln n - n^{\alpha-2}/2 + O(n^{\alpha-4}))$$

Le terme dans l'exponentielle tend toujours vers $-\infty$ par croissances comparées donc $n^2 u_n$ tend vers 0 soit $u_n = o(1/n^2)$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < 2$.

14

(**)

Centrale PC 2008

Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$ dans les cas suivants :

(a) $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha$ (discuter en fonction de α)

(b) $u_n = \exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(a) Pour tout réel $x > 0$,
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On peut donc en déduire le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} (\arctan n)^\alpha &= \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{2}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^\alpha \\ (\arctan n)^\alpha &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \left(1 - \frac{2\alpha}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{aligned}$$

Mis à part le cas trivial $\alpha = 0$ pour lequel $u_n = 0$, on en déduit l'équivalent $u_n \sim \alpha(\pi/2)^{\alpha-1}/n$. Le critère de Riemann permet alors de conclure :

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

(b) Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \exp \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \exp(1) \exp \left[-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp(1) \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalent $u_n \sim \exp(1)/2n$ et on conclut par Riemann.

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

15 _____ (**) _____ **Mines PC 2014**

Nature de la série de terme général $u_n = e^{n^8} \int_n^{+\infty} e^{-t^8} dt$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et effectuons le changement de variable $u = t^8$ dans l'intégrale définissant u_n . Ainsi, $t = u^{1/8}$ puis $dt = u^{-7/8} du/8$ et

$$\int_n^{+\infty} e^{-t^8} dt = \frac{1}{8} \int_{n^8}^{+\infty} \frac{1}{u^{7/8}} e^{-u} du$$

Sur l'intervalle $[n^8; +\infty[$, la fonction $u \mapsto 1/u^{7/8}$ est majorée par $1/n^7$, ce qui permet d'écrire

$$\int_{n^8}^{+\infty} \frac{1}{u^{7/8}} e^{-u} du \leq \frac{1}{n^7} \int_{n^8}^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{n^7} [-e^{-u}]_{n^8}^{+\infty} = \frac{e^{-n^8}}{n^7}$$

Au final, $0 \leq u_n \leq 1/(8n^7)$ et donc par comparaison aux séries de Riemann,

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

16 _____ (*) _____ **X PC 2014**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[-1; 1]$. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = n[f(1/n) - f(-1/n)] - 2f'(0)$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^3$, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 entre 0 et $1/n$ et obtenir lorsque n tend vers $+\infty$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(0)}{2n^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

puis de la même manière

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) - \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(0)}{2n^2} - \frac{f^{(3)}(0)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

En reportant ces deux développements limités dans l'expression de u_n , on obtient après simplifications

$$u_n = \frac{f^{(3)}(0)}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le critère de Riemann permet aussitôt de conclure à la convergence absolue de la série, et en particulier,

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

17

(*)

Déterminer en fonction des réels α et β la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^\beta$.

On distingue dans un premier temps trois cas suivant la valeur de β .

- Si $\beta < -1$, alors la série $\sum_{k \geq 1} k^\beta$ est convergente. Si l'on note S sa somme, la quantité u_n est alors équivalente à S/n^α , de sorte que le critère de Riemann permet de conclure : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Si $\beta = -1$, la série $\sum_{k \geq 1} k^{-1}$ est divergente, et sa n -ième somme partielle est équivalente à $\ln n$. On en déduit l'équivalent $u_n \sim 1/(n^\alpha \ln n)$. Il s'agit d'une série de Bertrand, qui converge si et seulement si $\alpha > 1$ (voir preuve en fin d'exercice).
- Enfin si $\beta > -1$, on sait d'après le cours (via une comparaison série-intégrale) que $\sum_{k \geq 1} k^{-1}$ est divergente, et que sa n -ième somme partielle est équivalente à $n^{\beta+1}/(\beta+1)$. Il s'ensuit que $u_n \sim n^{\beta+1-\alpha}/(\beta+1)$. Finalement, le critère de Riemann assure que la série converge si et seulement si $\beta+1-\alpha < -1$, soit $\alpha > \beta+2$.

Pour résumer,

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \max(\beta+2, 1)$.

Remarque : Pour justifier la nature de $\sum_{n \geq 2} 1/(n^\alpha \ln n)$, on distingue trois cas.

- Si $\alpha > 1$, alors le terme général est un $o(1/n^\alpha)$ donc la série converge.
- Si $\alpha = 1$, on effectue une comparaison série-intégrale. Pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n \ln n} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \geq \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

En sommant de 2 à N , il vient en particulier,

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \quad \text{avec} \quad \int_2^{N+1} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2)$$

Cette minoration assure que les sommes partielles tendent (très lentement) vers $+\infty$ et donc que la série diverge.

- Enfin, si $\alpha < 1$, il suffit de remarquer que $1/(n^\alpha \ln n) \geq 1/(n \ln n)$. Le terme de droite est celui d'une série divergente comme on vient de le voir, donc on est à nouveau confronté à une série divergente par minoration.

18

(**)

Calculer les sommes suivantes :

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-9} \quad (c) \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n(n+3)}{n^2-1}$$

- (a) La série est clairement convergente car son terme général est équivalent à $1/n^3$ ce qui permet d'appliquer le critère de Riemann. Pour déterminer la somme, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

ce qui permet le télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

- (b) La série converge car son terme général est équivalent à $1/4n^2$. Remarquons ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{(2n+3)(2n-3)} = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \right]$$

d'où
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - 9} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+3} \right]$$

On peut séparer les sommes et faire le changement d'indice $p = k + 3$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - 9} &= \frac{1}{6} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-3} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{2p-3} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[(-1) + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right] \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 9} = \frac{1}{18}}$$

(c) Un développement limité rapide donne
$$\frac{(-1)^n(n+3)}{n^2-1} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Cela assure la convergence de la série car son terme général est somme du terme général d'une série convergente (par CSA) et d'une série absolument convergente (par comparaison aux séries de Riemann). Pour le calcul de la somme, on a pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] \quad \text{et} \quad \frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right]$$

et donc
$$\frac{(-1)^n(n+3)}{n^2-1} = (-1)^n \left[\frac{2}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right]$$

En sommant pour n compris entre 2 et $N \in \mathbb{N}$, puis en faisant le changement d'indice $p = n - 1$ et $p = n + 1$ dans les sommes, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^N \frac{(-1)^n(n+3)}{n^2-1} &= 2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{p=3}^{N+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \\ &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{N-1}}{N} + \frac{(-1)^N}{N+1} \end{aligned}$$

On peut maintenant faire tendre N vers $+\infty$ en utilisant l'égalité $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1}/p = \ln 2$. Il vient finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{n^2-1} = \frac{1}{2} + \ln 2}$$

19 _____ (*) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de mêmes natures. Donner un contre-exemple si l'on ne suppose plus la suite à termes positifs.

Pour tout entier n , on note

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Son terme général tend alors vers 0 ce qui assure que $u_n \sim v_n$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs s'appliquent et prouve que $\sum v_n$ converge.

Réciproquement, supposons que $\sum v_n$ converge. Cette fois, v_n tend vers 0. Il suffit maintenant de remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in [0; 1[\quad \text{et} \quad u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$$

Cette relation assure à nouveau que $u_n \sim v_n$ et on conclut par comparaison. Finalement,

$$\boxed{\text{Les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de mêmes natures.}}$$

Pour trouver un contre-exemple lorsque la suite n'est plus positive, il suffit de prendre $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$. La série $\sum u_n$ converge, mais pas $\sum v_n$ en vertu du développement limité

$$v_n = \frac{(-1)^n/\sqrt{n}}{1+(-1)^n/\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

20

(***)

Soit $(d_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que

$$\sum_{n \geq 1} d_n^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \sqrt{D_n/n} < +\infty \quad \text{où} \quad D_n = \sum_{k \geq n} d_k^2$$

Déterminer la nature de la série de terme général $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^m \sum_{p=k}^m \frac{d_p}{p} = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^p \frac{d_p}{p} = \sum_{p=1}^m d_p$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela assure que pour tous entiers $k \leq m$,

$$\sum_{p=k}^m \frac{d_p}{p} \leq \left(\sum_{p=k}^m \frac{1}{p^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{p=k}^m d_p^2 \right)^{1/2}$$

Les sommes de droite sont à termes positifs et admettent une limite lorsque m tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\sum_{p=k}^m \frac{d_p}{p} \leq \left(\sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{p=k}^{\infty} d_p^2 \right)^{1/2} = \sqrt{D_k} \left(\sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \right)^{1/2}$$

De plus, une comparaison série-intégrale donne classiquement pour $k \geq 2$ la majoration

$$\sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{k-1} \quad \text{sachant que} \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On déduit de tout ceci l'inégalité

$$\sum_{p=1}^m d_p \leq \frac{\pi^2}{6} D_1 + \sum_{k=2}^m \sqrt{\frac{D_k}{k-1}}$$

La somme de droite a son terme général équivalent à $\sqrt{D_k/k}$, qui est le terme général d'une série convergente par hypothèse. Par comparaison, elle converge et

$$\sum_{p=1}^m d_p \leq \frac{\pi^2}{6} D_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \sqrt{\frac{D_k}{k-1}}$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{p \geq 1} d_p$ sont majorées, ce qui prouve que

La série $\sum_{p \geq 1} d_p$ converge.

21

(**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} \right)$$

Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Que peut-on dire de la suite $(\sqrt{n} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Notons que le terme général du produit est toujours strictement supérieur à 1. On peut donc écrire pour tout entier n ,

$$\ln a_n = \sum_{p=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} \right)$$

Notons maintenant pour tout entier $p \geq 1$,

$$w_p = \ln \left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} \right) - \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2p}$$

de sorte que $w_p = O(1/p^{3/2})$ d'après le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0. La comparaison aux séries de Riemann assure la convergence absolue de $\sum_{p \geq 1} w_p$, tandis que le critère spécial de convergence des séries alternées assure celle de

$\sum_{p \geq 1} (-1)^{p-1}/\sqrt{p}$. Enfin, le cours donne le développement asymptotique

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \ln n + \gamma + o(1)$$

En posant $C = -\frac{\gamma}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} + \sum_{p=1}^{+\infty} w_p$, cela permet d'écrire

$$\ln a_n = \sum_{p=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} \right) = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^n w_p = -\frac{1}{2} \ln n + C + o(1)$$

soit encore

$$\ln(a_n \sqrt{n}) = C + o(1)$$

En passant à l'exponentielle, il s'ensuit que

La suite $(a_n \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive. En particulier, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un équivalent de la forme $K/\sqrt{n}$ et tend vers 0.

22

(*)

On se donne $r \in]0; 1[$ et une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$0 < u_0 < u_1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = u_n + r^n u_{n-1}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Une récurrence immédiate assure que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs. Dès lors, elle est clairement croissante et il ne reste plus qu'à justifier qu'elle est majorée pour conclure. Mais par croissance de la suite, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \leq u_n(1 + r^n)$$

d'où par récurrence

$$u_n \leq u_1 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + r^k)$$

Il nous suffit maintenant de montrer que la suite des produits converge, ce qui prouvera qu'elle est bornée et qu'il en est de même de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par majoration. Dans cette optique, on a

$$\ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 + r^k) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + r^k)$$

Le terme général de cette somme est positif, équivalent à r^k lorsque k tend vers $+\infty$. La série $\sum r^k$ étant une série géométrique convergente, on en déduit par comparaison que $\sum \ln(1 + r^k)$ converge. Il découle finalement de tout ce qui précède que

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

23

(*)

Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série convergente. Notons $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes de la série :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

(a). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n R_k = \sum_{k=1}^n k u_k + (n+1) R_n$$

(b). On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive. Montrer que la série de terme général $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(c). Dans le cas de convergence, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n$.

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_n = R_{n-1} - R_n$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k u_k &= \sum_{k=1}^n k (R_{k-1} - R_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) R_k - \sum_{k=1}^n k R_k \\ \sum_{k=1}^n k u_k &= \sum_{k=0}^n R_k - (n+1) R_n \end{aligned}$$

soit bien

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n R_k = \sum_{k=1}^n k u_k + (n+1) R_n$$

(b) Supposons la série $\sum_{k \geq 0} R_k$ convergente. L'inégalité précédente permet d'écrire pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k u_k \leq \sum_{k=0}^n R_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} k u_k$ sont majorées donc la série converge.

Supposons maintenant la série $\sum_{k \geq 0} k u_k$ convergente. Alors pour tout entier n ,

$$(n+1)R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$$

On en déduit que $(n+1)R_n$ converge vers 0 puisqu'elle est majorée par un reste de limite nulle. L'égalité du (a) assure alors la convergence de la suite des sommes partielles de $\sum_{k \geq 0} R_k$. Finalement,

Les séries $\sum_{k \geq 0} R_k$ et $\sum_{k \geq 0} k u_k$ sont de mêmes natures.

(c) Dans le cas de convergence, on a vu à la question précédente que $(n+1)R_n$ converge vers 0. Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans l'égalité du (a).

En cas de convergence, $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$

24

(**)

Soient a, b deux réels strictement positifs et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

Montrer que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $b - a > 1$ et calculer alors sa somme.

Il suffit d'appliquer la règle de Raab-Duhamel, mais il faut la redémontrer. Le quotient u_{n+1}/u_n admet un développement asymptotique de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Notons $v_n = \ln(u_n/n^{a-b})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \ln u_n - \ln u_{n+1} - (a-b) \ln n + (a-b) \ln(n+1) \\ &= (a-b) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{a-b}{n} - \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ v_n - v_{n+1} &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum (v_n - v_{n+1})$ est donc convergente, ce qui assure que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, puis en passant à l'exponentielle la convergence de u_n/n^{a-b} vers une limite C strictement positive. Ainsi, on en déduit l'équivalent $u_n \sim C \cdot n^{a-b}$ et le critère de Riemann permet de conclure.

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.

Pour tout entier n , on a

$$(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$$

En sommant cette égalité de 0 à N , il vient $\sum_{n=0}^N (n+b)u_{n+1} = \sum_{n=0}^N (n+a)u_n$

En effectuant un changement d'indice dans la somme de gauche, cela donne

$$\sum_{n=1}^{N+1} (n+b-1)u_n - \sum_{n=0}^N (n+a)u_n = 0 \quad \text{soit} \quad (N+b)u_{N+1} + \sum_{n=0}^N (b-a-1)u_n - (b-1)u_0 = 0$$

D'après le travail effectué précédemment, on a l'équivalent $(N + b)u_{N+1} \sim C \cdot N^{a+1-b}$. Ce terme tend vers 0 lorsque $b - a > 1$, ce qui donne

$$(b - a - 1) \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} (b - 1) u_0$$

et finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(b - 1) u_0}{b - a - 1}$$

25

(***)

La partie entière d'un réel x est notée $[x]$. On s'intéresse à la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n}$$

On va pour cela appliquer une transformée d'Abel. On note donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{[\sqrt{k}]}$$

(a) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]} }{k} = \frac{S_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On introduit l'unique entier p tel que $p^2 \leq k < (p+1)^2$.

(i) Etablir que

$$S_k = \left[\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (2i-1) \right] + (-1)^p (k+1-p^2)$$

(ii) Calculer pour un entier p quelconque la somme $\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (2i-1)$ puis en déduire que

$$S_k = O(p) \quad \text{puis} \quad S_k = O(\sqrt{k})$$

(c) Conclure quand à la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n}$.

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n} = S_n - S_{n-1}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]} }{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{k}$$

On fait le changement d'indice $p = k - 1$ dans la seconde somme et il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]} }{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\ &= \frac{S_n}{n} - S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]} }{k} = \frac{S_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}$$

(b.i) Pour tout entier i et tout entier j compris entre i^2 et $(i+1)^2 - 1$, la partie entière de $\sqrt{j}$ est égale à i . Ainsi, en regroupant les termes compris entre deux carrés consécutifs, on obtient

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^p \left[\sum_{j=(i-1)^2}^{i^2-1} (-1)^{[\sqrt{j}]} \right] + \sum_{j=p^2}^k (-1)^{[\sqrt{j}]} \\ &= \sum_{i=1}^p \left[\sum_{j=(i-1)^2}^{i^2-1} (-1)^{i-1} \right] + \sum_{j=p^2}^k (-1)^p \end{aligned}$$

Dans chacune des sommes indicées par j , le terme ne dépend pas de j . Il suffit donc de compter le nombre de terme et de multiplier le tout par la quantité sommée. Ainsi,

$$S_k = \left[\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (2i-1) \right] + (-1)^p (k+1-p^2)$$

(b.ii) Pour calculer la somme, il y a plusieurs méthode. On peut appliquer (encore) une transformée d'Abel en « dérivant » le $(2i-1)$ et en « intégrant » le $(-1)^{i-1}$. Utilisons une méthode classique. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} x^{2i-1} = \frac{x - (-1)^p x^{2p+1}}{1+x^2}$$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (2i-1) x^{2i-2} = \frac{1 - (2p+1)(-1)^p x^{2p}}{1+x^2} - \frac{2x(x - (-1)^p x^{2p+1})}{(1+x^2)^2}$$

En appliquant cette égalité pour $x = 1$, on obtient la valeur de la somme cherchée

$$\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} (2i-1) = p(-1)^{p-1}$$

En réinjectant ce résultat dans l'égalité de la question (b.i) et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|S_k| \leq p + |k+1-p^2|$$

Mais par définition de p , on a

$$1 \leq k+1-p^2 < 2p+2 \quad \text{d'où} \quad |S_k| \leq 3p+2 = O(p)$$

Enfin, le même encadrement assure que $0 \leq p \leq \sqrt{k}$ et donc

$$S_k = O(\sqrt{k})$$

(c) La domination $S_k = O(\sqrt{k})$ prouve que

$$\frac{S_n}{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{S_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

Par conséquent, dans l'égalité de droite du résultat de la question (a), le terme S_n/n converge vers 0 tandis que la somme est absolument convergente par comparaison. Au final, on en déduit que

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} \text{ est convergente.}$$

26

(**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

Justifier l'existence de deux réels C, D (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tels que

$$u_n = 2\sqrt{n} + C + o(1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} \sqrt{n} + D + o(1)$$

Notons $F : x \mapsto 2\sqrt{x}$. L'application F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1; +\infty[$ ce qui permet d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre k et $k+1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$|F(k+1) - F(k) - F'(k)| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [k; k+1]} |F''(t)| = \frac{1}{4k^{3/2}}$$

Par conséquent, la série de terme général $F(k+1) - F(k) - F'(k)$ est convergente. Notons S sa somme. Alors pour tout entier n ,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (F(k+1) - F(k) - F'(k)) = 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ce qui permet d'écrire, avec $C = 1 - S$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C + o(1)$$

Pour le second développement asymptotique, on effectue le même travail avec $G : x \mapsto 2x^{3/2}/3$. Ainsi,

$$|G(k+1) - G(k) - G'(k) - G''(k)/2| \leq \frac{1}{6} \sup_{t \in [k; k+1]} |G^{(3)}(t)| = \frac{1}{24k^{3/2}}$$

On en déduit à nouveau la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} (G(k+1) - G(k) - G'(k) - G''(k)/2)$. Mais cette fois, pour tout entier n ,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (G(k+1) - G(k) - G'(k) - G''(k)/2) = \frac{2}{3}(n^{3/2} - 1) + \sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k} + \frac{1}{4\sqrt{n}} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En réinjectant le développement asymptotique obtenu précédemment, il vient cette fois

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + D + o(1)$$