

1 ————— (*) —————

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \quad (b) \int_0^{+\infty} \ln \operatorname{th} t dt \quad (c) \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{t} - \operatorname{ch} \sqrt{t}}{t^{3/2}} dt \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^{-t} + t^2 e^t}$$

(a) L'application $f : t \mapsto \ln t / (1-t)$ est continue sur $]0; 1[$. Lorsque t tend vers 0, on a

$$f(t) \sim \ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Le critère de Riemann assure la convergence de $\int_0^{1/2} f(t) dt$. De plus, lorsque t tend vers 1, on a

$$\ln t \sim t - 1 \quad \text{d'où} \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} -1$$

donc f est prolongeable par continuité en 1. Ainsi, $\int_{1/2}^1 f(t) dt$ converge et finalement,

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ converge.

(b) Notons $f : t \mapsto \ln \operatorname{th} t$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \quad \text{d'où} \quad f(t) = \ln(1 - e^{-2t}) - \ln(1 + e^{-2t})$$

On en déduit qu'en $+\infty$, $f(t) \sim -2e^{-2t}$ donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. En 0, on écrit

$$f(t) = \ln(2t + O(t^2)) + \ln(2 + O(t)) = \ln t + O(1) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Ainsi, $\int_0^1 f(t) dt$ converge et

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln \operatorname{th} t dt$ converge.

(c) L'application $f : t \mapsto (\cos \sqrt{t} - \operatorname{ch} \sqrt{t}) / t^{3/2}$ est continue sur $]0; 1[$. De plus, lorsque u tend vers 0,

$$\cos u - \operatorname{ch} u = \left(1 - \frac{u^2}{2} + O(u^4)\right) - \left(1 + \frac{u^2}{2} + O(u^4)\right) \sim -u^2 \quad \text{d'où} \quad f(t) \sim -\frac{1}{\sqrt{t}}$$

Le critère de Riemann permet de conclure.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{t} - \operatorname{ch} \sqrt{t}}{t^{3/2}} dt$ converge.

(d) L'application $t \mapsto 1/(e^{-t} + t^2 e^t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et équivalente en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement à e^t et e^{-t}/t^2 , qui sont les intégrandes d'intégrales convergentes. Par conséquent,

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^{-t} + t^2 e^t}$ est convergente.

2 ————— (*) —————

CCP PC 2013

Nature de $\int_0^1 |\ln t|^b (1-t)^a dt$ en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$?

L'application $f : t \mapsto |\ln t|^b (1-t)^b$ est définie, positive et continue sur $]0; 1[$. De plus, elle admet les équivalents en 0 et en 1 suivants :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} |\ln t|^b \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t \rightarrow 1-}{\sim} (1-t)^{a+b}$$

Notons que quel que soit la valeur de b , $|\ln t|^b = o(1/\sqrt{t})$, ce qui justifie que f est intégrable en 0 quel que soient les réels a et b . Le critère de Riemann assure par ailleurs que f est intégrable en 1 si et seulement si $a + b > -1$, d'où pour conclure,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 |\ln t|^b (1-t)^a dt \text{ converge si et seulement si } a + b + 1 > 0.}$$

3 _____ (*) _____

(a). A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ est-elle convergente ?

(b). Calculer $I(3/2)$, en admettant (ou en démontrant) que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(a) Notons

$$f : x \longmapsto \frac{\arctan x}{x^\alpha}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet les équivalents

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^\alpha}$$

On en déduit par le critère de Riemann que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ et $\alpha > 1$ soit

$$\boxed{\text{L'intégrale } I(\alpha) \text{ converge si et seulement si } \alpha \in]1; 2[.}$$

(b) Pour $\alpha = 3/2$, on commence par effectuer une intégration par parties en dérivant $\arctan$. Il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx = \left[-2 \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$$

L'intégration par parties est justifiée par l'existence de limite finies (nulle) pour $x \mapsto \arctan(x)/\sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$, et assure la convergence de la nouvelle intégrale. On peut maintenant effectuer le changement de variable $u = \sqrt{x}$ d'où $x = u^2$ et $dx = 2u du$, avec $x \mapsto \sqrt{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et alors

$$I(3/2) = \int_0^{+\infty} \frac{4u du}{u(1+u^4)}$$

et grâce au résultat admis

$$\boxed{I(3/2) = \pi\sqrt{2}}$$

Remarque : Le calcul de l'intégrale admise peut par exemple s'effectuer en justifiant la décomposition en éléments simple suivante, laquelle peut s'obtenir en décomposant dans $\mathbb{C}$ avant de repasser dans $\mathbb{R}$ en groupant les quantités conjuguées (calcul un peu lourd mais faisable)

$$\frac{1}{1+u^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{u + \sqrt{2}}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} - \frac{u - \sqrt{2}}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} \right)$$

4 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx$.

L'application $f : x \mapsto \cos x \ln(\tan x)$ est continue sur $]0; \pi/2[$. Lorsque x tend vers 0, on a

$$\ln(\tan x) = \ln(x + O(x^3)) = \ln x + \ln(1 + O(x^2)) \sim \ln x$$

d'où

$$f(x) \sim \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Cet équivalent assure l'intégrabilité de f au voisinage de 0. Lorsque x tend vers $\pi/2$, on a cette fois avec $u = \pi/2 - x$,

$$f(x) = -\sin u \ln(\tan u) \sim -u \ln u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

La fonction f se prolonge donc par continuité en $\pi/2$ ce qui prouve finalement l'intégrabilité de f sur $]0; \pi/2[$. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx \text{ est convergente.}}$$

Pour calculer l'intégrale, on fixe $\epsilon \in]0; \pi/4[$ et on effectue une intégration par parties. Sachant que

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{dx} (\ln(\tan x)) = \frac{1}{\cos^2 x \tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

il vient

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\pi/2-\epsilon} \cos x \ln \tan x \, dx &= [\sin x \ln \tan x]_{\epsilon}^{\pi/2-\epsilon} - \int_{\epsilon}^{\pi/2-\epsilon} \frac{1}{\cos x} \\ &= \left[\sin x \ln \tan x + \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]_{\epsilon}^{\pi/2-\epsilon} \end{aligned}$$

L'application $F : x \mapsto \sin x \ln \tan x - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$ est de limite nulle en 0 (puisque $\sin x \ln \tan x \sim x \ln x$). En $\pi/2$, on pose $x = \pi/2 - u$ et il vient

$$F(x) = -\cos u \ln \tan u + \ln \tan(u/2) = -\ln 2 + (1 - \cos u) \ln \tan u = -\ln 2 + O(u^2 \ln u)$$

On en déduit que F tend vers $-\ln 2$ en $\pi/2$, et donc en faisant tendre ϵ vers 0 que

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) \, dx = -\ln 2}$$

Remarque : On aurait pu intégrer directement sur $]0; \pi/2 - \epsilon]$ en remarquant que $\sin x \tan x$ a une limite finie en 0.

5 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^{3/2}} \, dt$.

Notons

$$\begin{aligned} f :]1; 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (t \ln t)/(t^2 - 1)^{3/2} \end{aligned}$$

L'application f est continue sur $]1; 2]$ et lorsque t tend vers 1, on a l'équivalent

$$f(t) = \frac{t \ln(1 + (t - 1))}{[(t + 1)(t - 1)]^{3/2}} \sim \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{t - 1}}$$

Le critère de Riemann assure alors l'intégrabilité de f sur $]1; 2]$ et donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^{3/2}} \, dt \text{ est convergente.}}$$

Pour calculer cette dernière, on effectue une intégration par parties

$$\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^{3/2}} \, dt = \left[\frac{-\ln t}{\sqrt{t^2 - 1}} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

L'intégration par parties se justifie par l'équivalent

$$\frac{\ln t}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\ln(1 + (t - 1))}{\sqrt{t + 1}\sqrt{t - 1}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\sqrt{t - 1}}{2}$$

qui assure que le terme entre crochets a une limite finie nulle en 1. Dans la nouvelle intégrale, on pose maintenant le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ sachant que $t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, il vient

$$t = \sqrt{u^2 + 1} \quad dt = \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 + 1}} \quad \text{et} \quad \int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2 + 1}$$

En reportant cette égalité dans l'intégration par parties, on obtient

$$\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^{3/2}} \, dt = -\frac{\ln 2}{\sqrt{3}} + [\arctan]_0^{\sqrt{3}}$$

soit

$$\boxed{\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^{3/2}} \, dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\ln 2}{\sqrt{3}}}$$

6 _____ (*) _____

Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{2 + [1/x]}$.

L'application $x \mapsto 1/(2 + \lfloor 1/x \rfloor)$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$ (et même en escalier), et prolongeable par continuité en 0 (elle tend vers 0 en ce point). Ainsi, l'intégrale est bien convergente. Pour la calculer, écrivons que

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 + \lfloor 1/x \rfloor} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{1/k}^1 \frac{dx}{2 + \lfloor 1/x \rfloor}$$

puis par la relation de Chasles, et pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{1/k}^1 \frac{dx}{2 + \lfloor 1/x \rfloor} = \sum_{p=1}^{k-1} \int_{1/(p+1)}^{1/p} \frac{dx}{2+p} = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right)$$

Une double décomposition en éléments simples permet maintenant d'obtenir un télescopage. En effet, pour tout $p \geq 1$,

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right)$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre k vers $+\infty$ pour obtenir

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{2 + \lfloor 1/x \rfloor} = \frac{1}{4}}$$

7 _____ (**) _____

- (a). Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha dx$.
- (b). Etablir une relation entre $I(\alpha)$ et $I(-\alpha)$.
- (c). A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\tan x}$, et de la valeur de l'intégrale donnée en 3.(b), calculer $I(1/2)$.
- (d). Montrer que $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\tan(k\pi/2n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I(1/2)$.

- (a) Notons $f : x \mapsto (\tan x)^\alpha$. L'application f est continue sur $]0; \pi/2[$ et est équivalente en 0 à $x \mapsto x^\alpha$. Elle est donc intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\alpha > -1$. En $+\infty$, on a en posant $t = \pi/2 - x$,

$$f(x) = (\tan x)^\alpha = \left(\frac{1}{\tan t} \right)^{-\alpha} \sim t^{-\alpha} = \frac{1}{(\pi/2 - x)^\alpha}$$

Ainsi, f est intégrable au voisinage de $\pi/2$ si et seulement si $\alpha < 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{L'intégrale } I(\alpha) \text{ est convergente si et seulement si } \alpha \in]-1; 1[.}$$

- (b) Puisque f est à valeurs positive, la convergence de $I(\alpha)$ équivaut à l'intégrabilité de f . Cela permet d'effectuer le changement de variable affine $x = \pi/2 - t$ et d'obtenir

$$\int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha = - \int_{\pi/2}^0 (\tan t)^{-\alpha}$$

soit

$$\boxed{\forall \alpha \in]-1; 1[, \quad I(\alpha) = I(-\alpha)}$$

- (c) D'après la question précédente, $I(1/2) = I(-1/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{\tan x}$, avec le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ de $]0; \pi/2[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$x = \arctan u^2 \quad dx = \frac{2u du}{1+u^4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}$$

et donc, étant donnée la valeur de cette intégrale par l'énoncé

$$\boxed{I(1/2) = \pi/\sqrt{2}}$$

- (d) Notons qu'il n'est pas possible d'appliquer les résultats sur les sommes de Riemann car la fonction $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est définie sur l'intervalle $[0; \pi/2[$ qui n'est pas un segment. Sa croissance permet en revanche d'affirmer que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$,

$$\int_{(k-1)\pi/(2n)}^{k\pi/(2n)} \sqrt{\tan x} \, dx \leq \frac{\pi}{2n} \sqrt{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \leq \int_{k\pi/(2n)}^{(k+1)\pi/(2n)} \sqrt{\tan x} \, dx$$

En sommant pour k allant de 1 à $n-1$, et en rajoutant un terme nul à la somme centrale, il vient

$$\int_0^{(1-1/n)\pi/2} \sqrt{\tan x} \, dx \leq \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \leq \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} \sqrt{\tan x} \, dx$$

On en déduit immédiatement par encadrement que

$$\boxed{\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I(1/2)}$$

8 _____ (**) _____ **Mines PC 2013**

Nature et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}$?

Notons

$$f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}$$

L'application f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et lorsque t tend vers l'infini, on a

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{1}{t^3}$$

Le critère de Riemann assure alors la convergence de l'intégrale. Pour le calcul, on pose $t = 2 \operatorname{sh} u$. L'application $u \mapsto \operatorname{sh} u$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui valide le changement de variable. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{ch} u \, du}{(1+4 \operatorname{sh}^2 u)\sqrt{4+4 \operatorname{sh}^2 u}}$$

Sachant que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, le deuxième terme se simplifie et ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+4 \operatorname{sh}^2 u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{e^{2u} + e^{-2u} - 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2u} \, du}{e^{4u} - e^{2u} + 1}$$

Posons maintenant $r = e^{2u}$ avec $u \mapsto e^u$ bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$. On obtient cette fois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 - r + 1}$$

Cette dernière intégrale se calcule après mise sous forme canonique du dénominateur. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 - r + 1} &= \int_0^{+\infty} \frac{dr}{(r - 1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} \frac{2/\sqrt{3} \, dr}{[2/\sqrt{3}(r - 1/2)]^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(r - \frac{1}{2}\right)\right) \right]_0^{+\infty} \\ \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 - r + 1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

9 _____ (**) _____ **X PC 2013**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, intégrable et dérivable en 0.

- (a). Montrer que $x \mapsto f(x)/x$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

(b). Justifier l'existence et donner la valeur en fonction de $\alpha, \beta > 0$ de $\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{f(\beta t) - f(\alpha t)}{t} dt$.

(c). Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

(a) Il suffit de remarquer que $|f(x)/x| \leq |f(x)|$ pour tout $x \geq 1$. Cette domination assure, f étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, que

$$\boxed{\text{L'application } x \mapsto f(x)/x \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[.}$$

(b) Soit $x, y > 0$. En séparant les intégrales puis en faisant deux changements de variable affine, on obtient

$$\int_x^y \frac{f(\beta t) - f(\alpha t)}{t} dt = \int_{\beta x}^{\beta y} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha x}^{\alpha y} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\alpha y}^{\beta y} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{f(t)}{t} dt$$

Lorsque y tend vers $+\infty$, on peut écrire grâce à l'intégrabilité de $x \mapsto f(x)/x$

$$\int_{\alpha y}^{\beta y} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\beta y}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha y}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

Par ailleurs, f étant dérivable en 0, on peut écrire lorsque t tend vers 0,

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + o(t) \quad \text{d'où} \quad \frac{f(t)}{t} - \frac{f(0)}{t} = f'(0) + o(1)$$

En particulier, l'application $t \mapsto f(t)/t - f(0)/t$ est bornée au voisinage de 0. On peut donc trouver $M \in \mathbb{R}_+$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]0; \epsilon[, \quad \left| \frac{f(t)}{t} - \frac{f(0)}{t} \right| \leq M$$

d'où pour $x < \epsilon/\beta$, en intégrant entre αx et βx ,

$$\left| \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{f(0)}{t} dt \right| \leq \int_{\alpha x}^{\beta x} M dt = M(\beta - \alpha)x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Sachant que $\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln(\beta/\alpha)$, cela signifie que

$$\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) \ln(\beta/\alpha)$$

On en déduit la convergence de l'intégrale et sa valeur.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(\beta t) - f(\alpha t)}{t} dt = f(0) \ln(\alpha/\beta)}$$

(c) L'application $t \mapsto (t-1)/\ln t$ est continue sur $]0; 1[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 (par 0) et en 1 (par 1, en vertu d'un développement limité). Elle est donc intégrable sur $]0; 1[$ ce qui permet d'effectuer le changement de variable $u = -\ln t$ (l'application $t \mapsto -\ln t$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-u}-1}{-u} (-e^{-u}) du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u} du$$

En vertu du résultat du (b) (la fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$), il s'ensuit que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2}$$

10

(***)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{1+u_n}$$

Montrer que $\int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = 2 \int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} u_n$.

Notons $f : x \mapsto 2x + 2\sqrt{x}\sqrt{1+x}$. L'application f réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, ce qui permet de poser le changement de variable $t = 2x + \sqrt{x}\sqrt{1+x}$. Alors,

$$dt = \left(2 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right) dx = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{1+x} + 1 + 2x}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} dx$$

Remarquons alors que

$$t + 1 = 2\sqrt{x}\sqrt{1+x} + 1 + 2x = (\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^2 \quad \text{et} \quad t = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) = 2\sqrt{x}\sqrt{t+1}$$

et ainsi, pour tout $a > 0$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = 2 \int_{f(a)}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a = u_n$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = 2 \int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout entier n ,

$$\int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2^n} \int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$$

Remarquons maintenant que $1/(x\sqrt{1+x}) \sim 1/x^{3/2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{u_n}} \quad (\star)$$

d'où

$$\frac{2}{\sqrt{u_n}} \sim \frac{1}{2^n} \int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$$

et donc

$$4^{-n} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \right)^{-2}$$

Remarque : On peut calculer l'intégrale en posant $v = \sqrt{1+x}$. Ainsi, $x = v^2 - 1$, puis $dx = 2v dv$ et

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int_{\sqrt{1+u_0}}^{+\infty} \frac{2 dv}{v^2 - 1} = \int_{\sqrt{1+u_0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \right) dv = \ln \left(\frac{\sqrt{1+u_0} + 1}{\sqrt{1+u_0} - 1} \right)$$

La relation $(\star)$ se justifie par les transferts des relations de comparaison : si g est intégrable au voisinage de $+\infty$, et si $f = o(g)$ (resp. $f \sim g$), alors f est également intégrable au voisinage de $+\infty$ et

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right) \quad (\text{resp. } \int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t) dt)$$

Ce résultat est hors-programme mais se montre très facilement en passant par la définition des $o(\dots)$ à l'aide des ϵ . On peut également utiliser le calcul de l'intégrale pour obtenir l'équivalent $(\star)$ mais c'est moins élégant.

11 ————— $(**)$ —————

L'application $t \mapsto \cos^2 t$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$? Même question pour $t \mapsto \frac{\cos^2 t}{t}$ sur $[1; +\infty[$.

Pour tout entier n , on note $I_n = \int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \cos^2(t) dt$ et $J_n = \int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{t} dt$

L'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \cos(t)^2$ (resp. $t \mapsto \cos(t)^2/t$) équivaut alors à la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} I_n$ (resp. $\sum_{n \geq 1} J_n$).

Par π -périodicité de la fonction $\cos^2$, il vient pour tout $n \geq 1$

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}$$

et

$$J_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(u)^2}{u + n\pi} du \geq \frac{1}{(n-1/2)\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = \frac{1}{2n-1}$$

Cette égalité et cette minoration assurent la divergence des deux séries précitées. Par conséquent,

Les fonctions $t \mapsto \cos(t)^2$ et $t \mapsto \cos(t)^2/t$ ne sont pas intégrables sur $[1; +\infty[$.

12 _____ (*) _____

Etudier l'intégrabilité de $x \mapsto 1 - \operatorname{th}^\alpha x$ sur $]0; +\infty[$ en fonction du réel α .

Notons $f : x \mapsto 1 - (\operatorname{th} x)^\alpha$, définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Lorsque x tend vers 0, on a l'équivalent $\operatorname{th} x \sim x$. Par conséquent,

- Si $\alpha \geq 0$, f est prolongeable par continuité en 0 (par 1 si $\alpha > 0$, et 2 si $\alpha = 0$). On a donc intégrabilité de f en 0.
- Si $\alpha < 0$, alors $f(x) \sim x^\alpha$ et f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < -1$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a cette fois

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = (1 - e^{-2x})(1 + e^{-2x})^{-1} = 1 - 2e^{-2x} + O(e^{-4x})$$

et donc $(\operatorname{th} x)^\alpha \sim 1 - 2\alpha e^{-2x} + O(e^{-4x})$ puis $f(x) \sim 2\alpha e^{-2x}$

Ainsi, f est intégrable au voisinage de $+\infty$, quelle que soit la valeur de α . Pour conclure,

L'application $x \mapsto 1 - (\operatorname{th} x)^\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha < -1$.

13 _____ (**) _____

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx$ est convergente mais pas absolument convergente.

L'application $x \mapsto x \sin(x^3)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $A > 0$. Sachant que $x \mapsto x^3$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, on peut écrire avec $u = x^3$

$$\int_1^A x \sin(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_1^{A^3} u^{1/3} \sin(u) \frac{du}{u^{2/3}} = \frac{1}{3} \int_1^{A^3} \frac{\sin u}{u^{1/3}} du$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en intégrant $\sin$, ce qui donne

$$\int_1^{A^3} \frac{\sin u}{u^{1/3}} du = \left[-\frac{\cos u}{u^{1/3}} \right]_1^{A^3} - \frac{1}{3} \int_1^{A^3} \frac{\cos u}{u^{4/3}} du$$

Sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{4/3}} du$ est absolument convergente donc convergente, ces deux égalités montrent que $\int_1^A x \sin(x^3) dx$ a une limite lorsque A tend vers $+\infty$. Ainsi,

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx$ est convergente.

Notons maintenant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_{(n\pi)^{1/3}}^{((n+1)\pi)^{1/3}} |x \sin(x^3)| dx$$

La convergence absolue de $\int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx$ équivaut alors à celle de $\sum_{n \geq 0} I_n$. Or, à nouveau par changement de variable $u = x^3$, pour tout entier n ,

$$I_n = \frac{1}{3} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u^{1/3}} du \geq \frac{1}{3} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{(n\pi)^{1/3}} du$$

La fonction $|\sin|$ est π -périodique donc son intégrale sur une période ne dépend pas du choix de la période, et est égale à 2. Il s'ensuit la minoration $I_n \geq 2/[3(n\pi)^{1/3}]$ et donc la divergence de la série $\sum_{n \geq 0} I_n$. Par suite,

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx$ n'est pas absolument convergente.

14 _____ (***) _____

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\alpha > 0$. On note

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f\left(\left|t - \frac{\alpha}{t}\right|\right) \end{aligned}$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Notons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t - \alpha/t \end{aligned}$$

L'application φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall t > 0, \quad \varphi'(t) = 1 + \frac{\alpha}{t^2}$$

Dès lors que φ' est strictement positive, il s'ensuit que φ réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers son image par φ . Sachant que φ tend vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, cette image est égale à $\mathbb{R}$ tout entier. Notons pour finir que φ s'annule en $\sqrt{\alpha}$, ce qui assure que $|\varphi|$ induit des $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes de $I_1 =]0; \sqrt{\alpha}]$ et $I_2 = [\sqrt{\alpha}; +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$.

Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de changement de variable s'applique et prouve que $\varphi' \cdot (f \circ |\varphi|)$ est intégrable sur I_1 et I_2 avec

$$\int_{I_1} |\varphi'| \cdot (f \circ |\varphi|) = \int_{I_2} |\varphi'| \cdot (f \circ |\varphi|) = \int_{\mathbb{R}_+} f$$

soit
$$\int_0^{\sqrt{\alpha}} g(t) \left(1 + \frac{\alpha}{t^2}\right) dt = \int_{\sqrt{\alpha}}^{+\infty} g(t) \left(1 + \frac{\alpha}{t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} f(u) du$$

et donc en sommant
$$\int_0^{+\infty} g(t) \left(1 + \frac{\alpha}{t^2}\right) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(u) du$$

Reste à justifier l'intégrabilité de g , et à se « débarrasser » du α/t^2 dans l'égalité ci-dessus. Remarquons déjà que $|\varphi'|$ est supérieure à 1, donc $|g| = |f \circ |\varphi|| \leq |\varphi'| \cdot f \circ |\varphi|$, ce qui assure par domination l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}_+^*$. A l'aide du $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $t \mapsto \alpha/t$, on obtient ensuite avec $u = \alpha/t$

$$\int_{+\infty}^0 f\left(\left|\frac{\alpha}{u} - u\right|\right) \frac{-\alpha du}{u^2} = \int_0^{+\infty} f\left(\left|t - \frac{\alpha}{t}\right|\right) dt \quad \text{d'où} \quad \int_0^{+\infty} g(t) \frac{\alpha dt}{t^2} = \int_0^{+\infty} g(t) dt$$

On peut donc conclure :

L'application g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

15

(**)

Déterminer pour tout $\lambda > 0$ la valeur de $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \lambda \cos^2 x}$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3 \cos^2 x}$ converge.

Pour calculer l'intégrale, on commence par remarquer que $\cos^2(\pi - x) = \cos^2 x$ pour tout $x \in [0; \pi]$ d'où

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \lambda^2 \cos^2 x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \lambda^2 \cos^2 x}$$

On effectue maintenant le changement de variable $u = \tan x$, sachant que $x \mapsto \tan x$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $[0; \pi/2[$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors,

$$x = \arctan u \quad dx = \frac{du}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + u^2}$$

d'où
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \lambda^2 \cos^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2 + \lambda^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right) \right]_0^{+\infty}$$

et finalement

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \lambda^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

Notons maintenant $f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^3 \cos^2 x}$ et pour tout entier n ,

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$$

La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ équivaut à celle de la série $\sum_{n \geq 0} I_n$. Or, pour tout entier n ,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + ((n+1)\pi)^3 \cos^2 x} \leq I_n \leq \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi)^3 \cos^2 x}$$

soit d'après ce qui précède

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + ((n+1)\pi)^3}} \leq I_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^3}}$$

Il s'ensuit que $I_n \sim \pi/(n\pi)^{3/2}$ et donc que la série $\sum_{n \geq 0} I_n$ converge par Riemann. Par suite,

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3 \cos^2(x)}$ est convergente.

16

(***)

X PC 2013

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $I = [1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur I . Montrer que $t \mapsto f(t)^2/t^2$ est intégrable sur I et déterminer la limite de $t \mapsto f(t)^2/t$ en $+\infty$.

Soit $x \geq 1$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2} dt &= \left[-\frac{f(t)^2}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \\ &= f(1)^2 - \frac{f(x)^2}{x} + \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a également

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt &\leq \left(\int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2} dt \right)^{1/2} \left(\int_1^x f'(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2} dt \right)^{1/2} \left(\int_1^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

en utilisant l'intégrabilité de f'^2 sur $[1; +\infty[$. Au final, en notant

$$\Phi : x \mapsto \int_1^x f(t)^2/t^2 dt \quad A = f(1)^2 \quad \text{et} \quad B = \left(\int_1^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

il vient

$$\Phi \leq A + B\sqrt{\Phi}$$

Pour en déduire que Φ est bornée, on utilise les mises sous forme canonique et inégalités suivantes :

$$\Phi - A\sqrt{\Phi} \leq B \quad \text{d'où} \quad \left(\sqrt{\Phi} - \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{A^4}{4} \leq B \quad \text{puis} \quad \left| \sqrt{\Phi} - \frac{A}{2} \right| \leq \sqrt{B + \frac{A^2}{4}}$$

et finalement

$$\sqrt{\Phi} \leq \frac{A}{2} + \sqrt{B + \frac{A^2}{4}} \quad \text{donc} \quad \Phi \leq \left(\frac{A}{2} + \sqrt{B + \frac{A^2}{4}} \right)^2$$

La fonction Φ est donc bornée, ce qui prouve bien que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)^2/t^2 dt$ converge. En d'autres termes,

La fonction $t \mapsto f(t)^2/t^2$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

17

(**)

Posons

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad g(x) = xf(x)f(x-1)$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que g est 1-périodique.
- Montrer que g admet une limite en $+\infty$. En déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x > 0$.
- Etablir l'équivalent $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $h : t \mapsto \sin(t)^x$ est définie et continue sur $]0; \pi/2]$. Lorsque t tend vers 0, on a l'équivalent $h(t) \sim t^x$, donc h est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x > -1$. Par conséquent,

La fonction f est définie sur $] -1; +\infty[$.

- (b) Soit $x > 0$. Effectuons une intégration par parties dans l'expression de $f(x+1)$, en intégrant $\sin t$ et en dérivant $(\sin t)^x$. On vérifie immédiatement que $\cos t (\sin t)^x$ a une limite nulle en 0, et ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt &= [-(\sin t)^x \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x(\sin t)^{x-1} \cos^2 t dt \\ &= [-(\sin t)^x \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x(\sin t)^{x-1} (1 - \sin^2 t) dt \end{aligned}$$

d'où
$$f(x+1) = x(f(x-1) - f(x)) \quad \text{soit} \quad (x+1)f(x+1) = xf(x-1)$$

En multipliant par $f(x)$, on obtient $g(x+1) = g(x)$, et ainsi

La fonction g est 1-périodique.

- (c) Il est clair que f est une fonction décroissante et positive. Ainsi, pour tout $x > 2$, en notant $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière,

$$xf(\lfloor x \rfloor + 1)f(\lfloor x \rfloor) \leq g(x) \leq xf(\lfloor x \rfloor)f(\lfloor x \rfloor - 1) \quad \text{soit} \quad \frac{x}{\lfloor x \rfloor + 1}g(\lfloor x \rfloor + 1) \leq g(x) \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor}g(\lfloor x \rfloor)$$

Mais en vertu de la 1-périodicité de g , la quantité $g(\lfloor x \rfloor)$ est une constante, égale à $g(1)$ soit $\pi/2$. Sachant que $\lfloor x \rfloor \sim x$ en $+\infty$, l'encadrement prouve donc que

La fonction g converge vers $\pi/2$.

Une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$ est nécessairement constante. Par conséquent, g est constante et plus précisément,

La fonction g est constante égale à $\pi/2$.

- (d) En utilisant à nouveau la décroissance de f , il vient pour tout $x > 0$,

$$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1) \quad \text{puis} \quad f(x+1)f(x) \leq f(x)^2 \leq f(x)f(x-1)$$

Sachant que g est constante égale à $\pi/2$ d'après la question (c), l'encadrement devient

$$\frac{\pi}{2(x+1)} \leq f(x)^2 \leq \frac{\pi}{2x}$$

et donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

18

(**)

Donner le domaine de définition, puis étudier la continuité et la dérivabilité de $f : x \mapsto \int_0^x \sin(1/t) dt$.

L'application $t \mapsto \sin(1/t)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et est un $O(1)$ au voisinage de 0. On en déduit son intégrabilité sur tout intervalle de la forme $]0; x]$ avec $x > 0$ ou de la forme $[x; 0[$ avec $x < 0$. En revanche, f n'est pas définie en 0 car l'intégrale définissant $f(0)$ ne peut ni être définie comme intégrale impropre, ni comme intégrale sur un segment. Ainsi,

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Sur $\mathbb{R}^*$, f est une primitive de $t \mapsto \sin(1/t)$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Étudions l'existence de limite et la dérivabilité en 0.

- Pour tout x non nul, on a
$$|f(x)| \leq \left| \int_0^x |\sin(1/t)| dt \right| \leq \left| \int_0^x 1 dt \right| = |x|$$

On en déduit aussitôt que f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

- Pour étudier la dérivabilité en 0, on effectue une intégration par partie. Pour tout $x > 0$ et tout $\epsilon \in]0; x[$,

$$\int_{\epsilon}^x \sin(1/t) dt = \int_{\epsilon}^x \frac{\sin(1/t)}{t^2} \cdot t^2 dt = [t^2 \cos(1/t)]_{\epsilon}^x - 2 \int_0^t t \cos(1/t) dt$$

d'où en faisant tendre ϵ vers 0,
$$f(x) = x^2 \cos(1/x) - 2 \int_0^x t \cos(1/t) dt$$

Un travail similaire donne l'égalité pour $x < 0$. Une majoration grossière montre alors que $|f(x)| \leq 2x^2$, ce qui assure que $f(x)/x$ tend vers 0 en 0. Ainsi, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Pour conclure,

La fonction f est définie et $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^*$. Elle est de plus prolongeable par continuité en 0, et le prolongement est dérivable en 0.

19

(**)

Soit f définie par

$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Justifier que f est définie pour tout réel x , puis donner un développement asymptotique à tout ordre en $+\infty$ de f .

L'application $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $1/t^2$ en $+\infty$. Elle est donc intégrable sur tout intervalle de la forme $[x; +\infty[$ avec $x \in \mathbb{R}$ et par conséquent,

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on fixe $x > 0$. Par intégration par parties, sachant que te^{-t^2} est de limite nulle en $+\infty$ par croissances comparées,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot te^{-t^2} dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$$

puis

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$$

De la même manière, en écrivant $e^{-t^2}/t^2 = (te^{-t^2})/t^3$, une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{4} \frac{e^{-x^2}}{x^3} + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt$$

puis à nouveau par IPP

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{4} \frac{e^{-x^2}}{x^3} + \frac{3}{8} \frac{e^{-x^2}}{x^5} - \frac{3 \cdot 5}{8} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^6} dt$$

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on note donc

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 1, \quad \alpha_p = (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2^{p+1}} = \frac{(-1)^p (2p)!}{2^p \cdot p! \cdot 2^{p+1}} = \frac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p+1} p!}$$

Au passage, cette dernière expression reste vraie pour $p = 0$. On généralise maintenant par récurrence immédiate sur p l'égalité

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^p \alpha_k \frac{e^{-x^2}}{x^{2k+1}} + 2\alpha_{p+1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2p+2}} dt$$

Remarquons ensuite que

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2p+2}} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{2p+2}} = \frac{e^{-x^2}}{(2p+1)x^{2p+1}} = O\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2p+1}}\right)$$

En réinjectant cette domination dans l'égalité précédente, puis en multipliant par e^{x^2} , on obtient le développement asymptotique à tout ordre

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k!} \frac{1}{x^{2k+1}} + O\left(\frac{1}{x^{2p+1}}\right)$$

20

(**)

Soit φ définie par

$$\varphi(x) = \int_x^{x^4} \frac{\arccos t}{\arcsin t} dt$$

- (a). Donner le domaine de définition de φ .
 (b). Déterminer un équivalent simple de $\varphi(x)$ en 0.

- (a) La fonction $t \mapsto \arccos(t)/\arcsin(t)$ est définie sur $\mathcal{D} = [-1; 0[\cup]0; 1]$. La quantité $\varphi(x)$ est définie seulement si $]x; x^4[$ est inclus dans $\mathcal{D}$. Cette condition impose $x \in]0; 1]$. Réciproquement, si $x \in]0; 1]$, la quantité $\varphi(x)$ est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment. Pour $x = 0$, elle n'est définie ni comme intégrale sur un segment (puisque 0 n'est pas dans $\mathcal{D}$), ni comme intégrale impropre (car $]0; 0[$ est vide). Ainsi,

La fonction φ est définie sur $]0; 1]$.

- (b) Lorsque t tend vers 0, on a $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + O(t^2)$ d'où

$$\arccos t = \frac{\pi}{2} - t + O(t^3) \quad \text{et} \quad \arcsin t = t + O(t^3) \quad \text{puis} \quad \frac{\arccos t}{\arcsin t} = \frac{\pi}{2t} + O(t)$$

Il existe donc $\delta \in]0; 1[$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall t \in]0; \delta[, \quad \left| \frac{\arccos t}{\arcsin t} - \frac{\pi}{2t} \right| \leq At$$

En intégrant cette inégalité entre x et x^4 pour $0 < x < \delta$ (ce qui implique $0 < x^4 < \delta$, il vient

$$\left| \int_x^{x^4} \frac{\arccos t}{\arcsin t} dt - \int_x^{x^4} \frac{\pi}{2t} dt \right| \leq A \left| \int_x^{x^4} t dt \right| \quad \text{soit} \quad \left| \varphi(x) - \frac{3\pi \ln x}{2} \right| \leq A(x^2 - x^8) = O(x^2)$$

Pour conclure,

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3\pi}{2} \ln x$$

21

(**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

- (a). Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$ converge.
 (b). Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$.

- (a) La fonction f étant continue et 1-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $|e^{-\lambda t} f(t)| \leq e^{-\lambda t} \|f\|_\infty$. Cette domination suffit pour prouver que

Pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$ converge.

- (b) Soit $\lambda > 0$. Effectuons le changement de variable $t = u - 1$ dans l'intégrale. Il vient par périodicité de f ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = \int_1^{+\infty} e^{-\lambda(u-1)} f(u-1) du = e^\lambda \int_1^{+\infty} e^{-\lambda u} f(u) du$$

$$\text{d'où} \quad (1 - e^{-\lambda}) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = \int_0^1 e^{-\lambda t} f(t) dt$$

Notons que $1 - e^{-\lambda} \sim \lambda$ lorsque λ tend vers $+\infty$. Il ne reste donc qu'à déterminer la limite du terme de droite ci-dessus. Appliquons pour cela l'inégalité des accroissements finis à la fonction $h : u \mapsto e^{-\lambda u}$ entre 0 et λt , avec $\lambda > 0$ et $t \in [0; 1]$. Alors,

$$|e^{-\lambda t} - 1| \leq |\lambda t| \sup_{u \in [0; \lambda t]} |h'(u)| = \lambda t$$

$$\text{Dès lors,} \quad \left| \int_0^1 e^{-\lambda t} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |e^{-\lambda t} - 1| |f(t)| dt \leq \lambda K$$

$$\text{avec } K = \int_0^1 t |f(t)| dt, \text{ indépendant de } \lambda. \text{ Par conséquent, } \int_0^1 e^{-\lambda t} f(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 f(t) dt \text{ et}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) \, dt = \int_0^1 f(t) \, dt$$

Remarque : On aurait aussi pu utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le TCD pour trouver la limite de la quantité $\int_0^1 e^{-\lambda t} f(t) \, dt$ lorsque λ tend vers 0.