

1 ————— (**) ————— **Mines PC 2016**

Un centre d'appel cherche à contacter n personnes, chacune ayant une probabilité $p \in]0; 1[$ de répondre. On note X le nombre de personnes ayant répondu à la première vague d'appels. Le centre lance un nouvel appel aux personnes n'ayant pas répondu la première fois. Soit Y le nombre de personnes ayant répondu la deuxième fois, mais pas la première.

- Donner la loi de X .
- Déterminer $P(Y = k | X = i)$ pour $(i, k) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$.
- Soit $Z = X + Y$. Donner la loi de Z ainsi que son espérance.

- L'énoncé suppose implicitement que les premiers appels sont mutuellement indépendant. L'expérience aléatoire consiste donc à répéter n expériences de Bernoulli de paramètre p et de faire la somme des résultats. Dès lors,

La variable X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

- L'évènement $(Y = k \cap X = i)$ est vide si $k + i > n$ (il ne peut y avoir plus de n personnes qui répondent aux appels). Par ailleurs, le nombre de personnes répondant au deuxième appel parmi les $n - i$ n'ayant pas répondu au premier suit là encore une loi binomiale, de paramètres $(n - i, p)$ cette fois. Ainsi,

$$\forall i, k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \leq n-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La variable Z est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. En utilisant le système complet d'évènements $((X = i))_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$, il vient

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^n P(Z = k \cap X = i) \\ &= \sum_{i=0}^n P(Y = k - i \cap X = i) \\ P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P(Y = k - i | X = i) \cdot P(X = i) \end{aligned}$$

On peut utiliser les expressions des deux questions précédentes pour obtenir

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^k (1-p)^{2n-i-k} \\ P(Z = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{2(n-k)} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} (1-p)^{k-i} \end{aligned}$$

On peut alors utiliser la formule du binôme pour simplifier la dernière somme et obtenir

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (1 + (1-p))^k = \binom{n}{k} (p')^k (1-p')^{n-k}$$

où l'on a posé

$$p' = 2p - p^2 = 1 - (1-p)^2$$

On constate donc que Z suit une loi binomiale de paramètres (p', n) , et donc que son espérance est np' . Finalement,

La variable aléatoire Z suit une loi binomiale de paramètres $(n, p(2-p))$ et a pour espérance $np(2-p)$.

Remarque : Le résultat ne doit pas être une surprise. L'expérience aléatoire équivaut à exécuter n fois et de manière indépendante « appeler une personne une première fois, puis une deuxième fois en cas d'échec » qui suit clairement une loi de Bernoulli avec probabilité d'échec de $(1-p)^2$ et donc une probabilité de succès de $1 - (1-p)^2$.

2 ————— (**) ————— **X PC 2016**

En arrivant dans un restaurant, n personnes déposent leur manteau au vestiaire. En partant du restaurant, chacun prend un manteau au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant récupéré leur manteau. Déterminer la loi de X .

On modélise l'expérience par l'univers σ_n des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ (où $\sigma(i)$ représente le numéro du manteau récupéré le i -ième individu, puis en posant

$$X : \sigma_n \longrightarrow \mathbb{N} \\ \sigma \longmapsto \text{card} \{k, \sigma(k) = k\}$$

Déterminer la loi de X consiste alors à calculer le nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant exactement k points fixes pour tout entier k . Notons $\sigma_{n,k}$ l'ensemble des ces permutations. Pour construire un élément de $\sigma_{n,k}$,

- On commence par choisir les k points fixes dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. On a $\binom{n}{k}$ possibilités.
- Puis on choisit un dérangement, c'est-à-dire une permutation sans points fixes, des $n - k$ éléments restants. Le nombre de possibilités ne dépend pas des éléments à permuter, seulement du cardinal de l'ensemble des éléments en question, en l'occurrence $n - k$. On a donc d_{n-k} choix possibles, où l'on note d_p le nombre de dérangements d'un ensemble à p éléments pour tout entier p .

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P(X = k) = \frac{\text{card}(\sigma_{n,k})}{\text{card}(\sigma_n)} = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

Il suffit maintenant de déterminer une expression de d_{n-k} . Remarquons pour cela que pour tout entier n ,

$$\sigma_n = \bigcup_{k=0}^n \sigma_{n,k} \quad \text{d'où} \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$$

En posant le changement d'indice $p = n - k$ et par symétrie des coefficients binomiaux, il vient ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} d_p \quad (*)$$

Un exercice classique permet alors d'en déduire une formule inverse de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! \quad (**)$$

La preuve de $(*) \implies (**)$ peut se faire de diverses façons, en particulier par récurrence même si c'est un peu laborieux. On trouvera une preuve plus élégante dans l'épreuve Centrale 2 PC 2016 (questions I.A.7 et I.A.8). Après simplifications des factorielles et un nouveau changement d'indices $p = n - k$, on obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

et en particulier

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

3 _____ (**) _____ **Centrale PC 2016**

Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules, n portent le numéro 0, les autres sont numérotées de 1 à n . On tire simultanément n boules de l'urne. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si la boule portant le numéro i a été tirée, 0 sinon.

- Déterminer la loi de X_i , la covariance $\text{cov}(X_i, X_j)$ si $1 \leq i < j \leq n$.
- Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

- La variable aléatoire X_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour déterminer la loi de X_i , il suffit de compter le nombre de tirages qui contiennent la boule i . Pour construire un tel tirage, on choisit $n - 1$ boules parmi les $2n - 1$ différentes de i , puis on rajoute i au lot. Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X_i = 1) = \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Notamment,

$$\text{La variable aléatoire } X_i \text{ suit une loi uniforme sur } \{0, 1\}.$$

L'énoncé ne le demande pas explicitement mais en particulier,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad E(X_i) = \frac{1}{2}$$

Soient maintenant $i \neq j$. Par définition,

$$\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Comme précédemment, $X_i \cdot X_j$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et il suffit de déterminer le nombre de tirages pour lesquels contenant les boules i et j pour déterminer sa loi. Là encore, on construit un tel tirage en sélectionnant $n - 2$ boules parmi celles distinctes de i et j , puis on rajoute i et j . Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X_i \cdot X_j = 1) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

et donc

$$E(X_i \cdot X_j) = 1 \cdot P(X_i \cdot X_j = 1) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

et pour finir

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4(2n-1)}$$

(b). Par définition de S et des $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

d'où, par linéarité de l'espérance,

$$E(S) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n}{2}$$

Par définition de la variance,

$$V(S) = E(S^2) - E(S)^2 \quad \text{où} \quad S^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \cdot \sum_{i < j} X_i \cdot X_j$$

Toujours par linéarité de l'espérance,

$$E(S^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + 2 \cdot \sum_{i < j} E(X_i \cdot X_j)$$

Notons que $X_i^2 = X_i$ puisque X_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$. En particulier, X_i^2 a également une espérance de valeur $1/2$. L'espérance de $X_i \cdot X_j$ a été calculée précédemment. Finalement,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{i < j} \frac{n-1}{2(2n-1)} \\ &= \frac{n}{2} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-1}{2(2n-1)} \\ &= \frac{n(2n-1) + n(n-1)^2}{2(2n-1)} \\ E(S^2) &= \frac{n^3}{2(2n-1)} \end{aligned}$$

et enfin

$$V(S) = \frac{n^3}{2(2n-1)} - \frac{n^2}{4} = n^2 \left[\frac{n}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} \right]$$

soit pour conclure

$$V(S) = \frac{n^2}{4(2n-1)}$$

4 _____ (**) _____ **ENS PC 2016**

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On dit que λ est une valeur médiane si $P(X \leq \lambda) \geq 1/2$ et $P(X \geq \lambda) \geq 1/2$.

- Montrer que X admet une valeur médiane. Est-elle forcément unique ?
- Trouver t minimisant $t \mapsto E((X - t)^2)$.
- Trouver t minimisant $t \mapsto E(|X - t|)$.

Dans tout l'exercice, puisque X est à valeurs finies, on notera $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et on peut sans perdre de généralité supposer $x_0 < \dots < x_n$. Pour tout entier i , on note $p_i = P((X = x_i))$. Avec ces notations, on a donc

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1$$

(a). Soit m le plus petit entier de $\llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $\sum_{k=0}^m p_k \geq 1/2$. Montrons qu'alors x_m est une valeur médiane.

• D'une part,
$$(X \leq x_m) = \bigcup_{k=0}^m (X = x_k)$$

d'où
$$P((X \leq x_m)) = \sum_{k=0}^m P((X = x_k)) = \sum_{k=0}^m p_k \geq \frac{1}{2}$$

• D'autre part,
$$(X \geq x_m) = \bigcup_{k=m}^n (X = x_k)$$

d'où
$$P((X \geq x_m)) = \sum_{k=m}^n P((X = x_k)) = \sum_{k=m}^n p_k = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_k$$

Mais par définition de m , on a $\sum_{k=0}^{m-1} p_k < \frac{1}{2}$ ce qui implique notamment que

$$P((X \geq x_m)) > \frac{1}{2}$$

Ainsi, x_m est bien une valeur médiane, ce qui prouve que

La variable aléatoire X admet au moins une valeur médiane.

Notons que si X suit une loi uniforme sur $[0; 1]$, alors pour tout $x \in [0; 1]$,

$$P(X \leq x) = P(X \geq x) = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que

Il n'y a pas nécessairement unicité d'une valeur médiane.

(b). Pour tout réel t ,
$$E((X - t)^2) = E(X^2) - 2tE(X) + t^2$$

qui est une quantité polynomiale de degré 2 de coefficient dominant strictement positif (en l'occurrence 1). Elle admet donc un unique minimum global, qui est atteint en l'unique zéro de sa dérivée. Par conséquent,

La fonction $t \mapsto E((X - t)^2)$ atteint son minimum en $t = E(X)$.

(c). Notons $\Phi : t \mapsto E(|X - t|)$. En vertu du théorème de transfert, on a pour tout réel t

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^n p_k |t - x_k|$$

L'application Φ est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ avec

$$\Phi'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < x_0 \\ \sum_{k=0}^i p_k - \sum_{k=i+1}^n p_k & \text{si } t \in]x_i; x_{i+1}[\text{ avec } i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{si } t > x_n \end{cases}$$

La fonction Φ' est donc constante par morceaux et croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. De plus,

$$\sum_{k=0}^i p_k - \sum_{k=i+1}^n p_k \geq 0 \iff 2 \sum_{k=0}^i p_k - 1 \geq 0 \iff \sum_{k=0}^i p_k \geq \frac{1}{2}$$

On en déduit notamment que si m est l'entier introduit à la première question, alors $\Phi'(t)$ est strictement négative si $t < x_m$ et positive si $t \geq x_m$. En particulier, Φ atteint un minimum global en x_m .

L'application $t \mapsto E(|X - t|)$ atteint un minimum global en la valeur médiane définie à la question (a).

Remarque : Si $\sum_{k=0}^m p_k > 1/2$, alors c'est le seul point en lequel le minimum global est atteint. Si $\sum_{k=0}^m p_k = 1/2$, elle atteint ce minimum global sur tout l'intervalle $[x_m; x_{m+1}]$, et plus généralement sur $[x_m; x_{M+1}]$ où M est plus grand entier tel que $\sum_{k=0}^M p_k = 1/2$.

5 ————— (*) ————— **Centrale PC 2019**

Soit une pièce ayant pour probabilité p de tomber sur pile et $q = 1 - p$ de tomber sur face. A lance la pièce et s'arrête de la lancer lorsqu'il fait pile pour la première fois. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par A . B lance alors la pièce autant de fois que A . On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pile effectués par B .

- Déterminer l'ensemble image de X et de Y .
- Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = j | X = k)$.
- Donner la loi de Y .
- Y admet-elle une espérance ?

- A doit faire au moins un lancer avant de s'arrêter et peut en faire un nombre arbitrairement grand. B peut alors avoir un nombre arbitrairement grand de lancers à effectuer qui peuvent aussi bien tous faire pile ou ne faire que des faces. Par conséquent,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

- Une variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenus lors d'une série de k lancers, k étant fixé, suit une loi binomiale de paramètres (k, p) . Par conséquent,

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad P(Y = j | X = k) = \begin{cases} p^j \cdot q^{k-j} \cdot \binom{k}{j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $((X = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$,

$$P(Y = j) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = j | X = k) \cdot P(X = k)$$

D'après la question précédente, les termes d'indices $k < j$ de la somme sont nuls. De plus, il est clair que X suit une loi géométrique de paramètre p . Ainsi, si $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} p^j \cdot q^{k-j} \cdot \binom{k}{j} \cdot p \cdot q^{k-1} \\ &= p^{j+1} \cdot q^{j-1} \cdot \sum_{r=0}^{+\infty} q^{2r} \binom{r+j}{j} \end{aligned}$$

Or, pour tout $|z| < 1$ et tout entier p ,

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n \quad (*)$$

donc

$$P(Y = j) = p^{j+1} \cdot q^{j-1} \cdot \frac{1}{(1-q^2)^{j+1}}$$

Sachant que $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$, on peut simplifier légèrement en

$$P(Y = j) = \frac{q^{j-1}}{(1+q)^{j+1}}$$

Pour $j = 0$,

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} = p \cdot \frac{q}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}$$

ce qui achève de déterminer la loi.

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(Y = j) = \begin{cases} \frac{q^{j-1}}{(1+q)^{j+1}} & \text{si } j \geq 1 \\ \frac{q}{1+q} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (d). La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si $\sum_{j \geq 0} j \cdot P(Y = j)$ converge. Or, pour tout $j \geq 1$,

$$j \cdot P(Y = j) = j \cdot \frac{q^{j-1}}{(1+q)^{j+1}} = j \cdot \left(\frac{q}{1+q} \right)^j \cdot \frac{1}{q(1+q)} = o\left(\frac{1}{j^2}\right)$$

par croissances comparées dès lors que $q/(1+q) < 1$. Ainsi, par Riemann, la série $\sum_{j \geq 0} j \cdot P(Y = j)$ converge et

La variable aléatoire Y admet une espérance.

Remarque : Il est vraisemblable que l'énoncé soit incomplet et demande ensuite de calculer cette espérance. A l'aide de $(*)$, on trouve facilement que celle-ci vaut exactement 1.

6

(*)

CCP PC 2019

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p . On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

- (a). Donner la loi de (U, V) .
 (b). Donner la loi de V et $E(V)$.

- (a). Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc il en est de même pour U et V . De plus, $U \geq V$ par définition donc (U, V) est à valeurs dans $\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, a \geq b\}$. Soient donc $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq b$. Dans un premier temps,

$$((U, V) = (a, b)) = \begin{cases} (X = a, Y = b) \cup (X = b, Y = a) & \text{si } a > b \\ (X = a, Y = a) & \text{si } a = b \end{cases}$$

l'union étant disjointe dans le premier cas. Par indépendance, on a donc

$$P((U, V) = (a, b)) = \begin{cases} P(X = a) \cdot P(Y = b) + P(X = b) \cdot P(Y = a) & \text{si } a > b \\ P(X = a) \cdot P(Y = a) & \text{si } a = b \end{cases}$$

et puisque X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p , on en déduit la loi de (U, V)

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $a \geq b$, en notant $q = 1 - p$,

$$P((U, V) = (a, b)) = \begin{cases} 2p^2 q^{a+b-2} & \text{si } a > b \\ p^2 q^{a+b-2} & \text{si } a = b \end{cases}$$

- (b). On rappelle que V est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour déterminer la loi de V , utilisons la formule des probabilités totales. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$P(V = k) = \sum_{r=1}^{+\infty} P(U = r, V = k)$$

D'après la question précédente, les termes d'indices strictement inférieurs à k sont nuls et l'égalité devient

$$P(V = k) = p^2 q^{2k-2} + 2 \sum_{r=k+1}^{+\infty} p^2 q^{k+r-2}$$

A l'aide de la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, il vient finalement

$$P(V = k) = p^2 q^{2k-2} + 2p^2 \frac{q^{2k-1}}{1-q} = p^2 q^{2k-2} + 2pq^{2k-1} = p(p+2q)q^{2k-2}$$

et finalement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(V = k) = p(1+q)q^{2k-2}$$

L'espérance de V est donnée par

$$E(V) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(V = k) = p(1+q) \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{2k-2}$$

Pour calculer cette somme, on peut utiliser la formule

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{qui donne par dérivation} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$$

En particulier avec $x = q^2$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{2k-2} = \frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{1}{(1-q)^2(1+q)^2} = \frac{1}{p^2(1+q)^2}$$

Finalement, après simplifications

$$E(V) = \frac{1}{p(1+q)} = \frac{1}{1-q^2}$$

7 (*) **Centrale PC 2016**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la loi de $\max(X, Y)$.

Notons $Z = \max(X, Y)$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, on a l'union disjointe

$$(Z = k) = (X = Y = k) \cup (X < k, Y = k) \cup (X = k, Y < k)$$

d'où

$$P((Z = k)) = P((X = Y = k)) + P((X < k, Y = k)) + P((X = k, Y < k))$$

Par indépendance des variables et en utilisant la symétrie des rôles de X et Y (qui suivent la même loi), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P((Z = k)) &= P((X = k))^2 + 2P(X = k) \cdot P(X < k) \\ &= P(X = k) \cdot [2P(X \leq k) - P(X = k)] \end{aligned}$$

ce qui donne finalement par définition d'une loi de Poisson

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P((Z = k)) = \frac{\lambda^k e^{-2\lambda}}{k!} \left[2 \left(\sum_{p=0}^k \frac{\lambda^p}{p!} \right) - \frac{\lambda^k}{k!} \right]$$

Remarque : Je ne pense pas qu'il y ait moyen de simplifier cette expression, et notamment de se débarrasser du symbole de somme.

8 (*) **Mines PC 2016**

Soit X une variable aléatoire ayant un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X possède un moment d'ordre p pour tout $p \leq n$.

Soit $p \leq n$ et $x \in X(\Omega)$. Alors,

$$|x^p P(X = x)| \leq \begin{cases} P(X = x) & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x^n P(X = x)| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Dans tous les cas,

$$|x^k P(X = x)| \leq P(X = x) + |x^n P(X = x)|$$

Le terme de droite est la somme de deux termes généraux de séries convergentes puisque par hypothèse X admet un moment d'ordre n et que $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)$ est convergente de somme 1. Par comparaison, $\sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$ est absolument convergente, ce qui signifie que

$$\text{La variable aléatoire } X \text{ admet un moment d'ordre } p \text{ pour tout } p \leq n.$$

9 (*) **Mines PC 2016**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Calculer $P(Y \geq X)$ et $P(Y = X)$.

Par définition,

$$(Y \geq X) = \bigcup_{i \geq 1} (Y \geq i \text{ et } X = i) \quad \text{et} \quad (Y = X) = \bigcup_{i \geq 1} (Y = X = i)$$

et donc, par union disjointe puis par indépendance de X et Y ,

$$P(Y \geq X) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y \geq i) \cdot P(X = i) \quad \text{et} \quad P(Y = X) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = i) \cdot P(X = i)$$

Rappelons que lorsqu'une variable aléatoire Z suit une loi géométrique, alors $P(Z \geq i) = (1-p)^{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ (c'est la probabilité d'avoir $i-1$ échecs). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y \geq i) \cdot P(X = i) &= \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \cdot (1-p)^{i-1} \\
&= p \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2(i-1)} \\
\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y \geq i) \cdot P(X = i) &= \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}
\end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = i) \cdot P(X = i) &= \sum_{i=1}^{+\infty} (p(1-p)^{i-1})^2 \\
&= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2(i-1)} \\
\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y \geq i) \cdot P(X = i) &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$P(Y \geq X) = \frac{1}{2-p} \quad \text{et} \quad P(Y = X) = \frac{p}{2-p}$$

10

(**)

Mines PC 2016

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (U, V) et en déduire les lois de U et V . Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Commençons par remarquer que U est à valeurs dans $\mathbb{N}$ tandis que V est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soient donc $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas suivant la valeur de i :

- Si $i = 0$, alors $(U = i, V = j) = (X = Y = j)$

d'où par indépendance des variables aléatoires X et Y

$$P((U = 0, V = j)) = P(X = j, Y = j) = P(X = j) \cdot P(Y = j) = p^2(1-p)^{2(j-1)}$$

- Si i est non nul, $(U = i, V = j) = (X = j + i, Y = j) \cup (X = j, Y = i + j)$

puis

$$\begin{aligned}
P((U = i, V = j)) &= P(X = i + j) \cdot P(Y = j) + P(X = j) \cdot P(Y = i + j) \\
&= 2p^2(1-p)^{i+2j-2}
\end{aligned}$$

Finalement,

La loi du couple (U, V) est donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad P((U = i, V = j)) = \begin{cases} p^2(1-p)^{2(j-1)} & \text{si } i = 0 \\ 2p^2(1-p)^{i+2(j-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer la loi de U , utilisons le système complet d'événements $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}^*}$. On distingue encore deux cas suivant la valeur de i :

- Si $i = 0$, alors $P(U = 0) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(U = 0, V = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(j-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$

- Si $i > 0$, alors $P(U = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(U = i, V = j) = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{i+2(j-1)} = 2 \frac{p^2(1-p)^i}{1-(1-p)^2} = \frac{2p(1-p)^i}{2-p}$

Pour celle de V , on utilise le système complet d'événement $((X = i))_{i \in \mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
P(V = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((U = i, V = j)) \\
&= p^2(1-p)^{2(j-1)} + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{i+2(j-1)} \\
&= p^2(1-p)^{2(j-1)} + \frac{2p^2(1-p)^{2j-1}}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^{2(j-1)} [p^2 + 2p(1-p)] \\
P(V = j) &= p(2-p)(1-p)^{2(j-1)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\text{Les lois de } U \text{ et } V \text{ sont données respectivement par} \\ \forall i \in \mathbb{N}, \quad P((U = i)) &= \begin{cases} p/(2-p) & \text{si } i = 0 \\ 2p(1-p)^i/(2-p) & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{et } \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad P(V = j) &= p(2-p)(1-p)^{2(j-1)} \end{aligned}$$

Compte tenu de ces valeurs, on vérifie immédiatement que l'égalité $P((U = i, V = j)) = P((U = i)) \cdot P((V = j))$ est vérifiée pour tous $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que

Les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

11 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

Soient $a \in [0; 1]$ et $b \in \mathbb{R}_+$, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi conjointe donnée par

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{b^i e^{-b} (1-a)^{i-j} a^j}{(i-j)! j!} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et de Y . Calculer leur espérance et leur variance si elles existent.

Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. La formule des probabilités totales assure que

$$P(X = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = i, Y = k) \quad \text{et} \quad P(Y = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = j)$$

soit

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{k=0}^i \frac{b^i e^{-b} (1-a)^{i-k} a^k}{(i-k)! k!} & \text{et} & \quad P(Y = j) = \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{b^k e^{-b} (1-a)^{k-j} a^j}{(k-j)! j!} \\ &= \frac{b^i e^{-b}}{i!} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} a^k (1-a)^{i-k} & & \quad = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b^{p+j} e^{-b} (1-a)^p a^j}{p! j!} \\ &= \frac{b^i e^{-b}}{i!} (1 + (1-a))^i & & \quad = \frac{(ab)^j e^{-b}}{j!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(b(1-a))^p}{p!} \\ P(X = i) &= \frac{b^i e^{-b}}{i!} & & \quad P(Y = j) = \frac{(ab)^j e^{-b}}{j!} e^{b(1-a)} = \frac{(ab)^j e^{-ab}}{j!} \end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer que

La variable aléatoire X (resp. Y) suit une loi de Poisson de paramètre b (resp. ab).
En particulier, elle admet b (resp. ab) pour espérance et pour variance.

12 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Quelle est la probabilité que X soit pair ?

Dans un premier temps, $(X \text{ pair}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)$ d'où $P((X \text{ pair})) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = 2k))$

et donc, par définition d'une loi de Poisson, $P((X \text{ pair})) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$

soit $P((X \text{ pair})) = e^{-\lambda} \text{ch } \lambda$

13 _____ (**) _____ **Centrale PC 2016**

Trois clients se présentent à une banque disposant de deux guichets. Les clients C_1 et C_2 se présentent en premier aux deux guichets, puis le client C_3 se présente ensuite au premier des deux guichets qui se libère. Le temps passé par le client C_i suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Déterminer la probabilité que C_3 termine le dernier.

L'énoncé ne précise pas si on s'intéresse aux cas où C_3 termine le dernier au sens large (c'est-à-dire à égalité avec C_1 ou C_2) ou au sens strict. Le calcul ci-dessous concerne le cas où C_3 termine le dernier au sens large. On rappelle que si X suit une loi géométrique de paramètre p , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$$

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, notons T_i le temps passé par le client C_i au guichet, puis E l'évènement « C_3 termine le dernier ». Alors,

$$E = ((T_2 + T_3 \geq T_1) \cap (T_2 < T_1)) \cup ((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2)) \cup (T_1 = T_2) \quad (\star)$$

Fixons $i < j \in \mathbb{N}^*$. Alors, $P(T_1 = i \cap T_2 = j) = P(T_1 = i) \cdot P(T_2 = j) = p(1-p)^{i-1} \cdot p(1-p)^{j-1}$

puis $P(T_1 + T_3 \geq T_2 \mid (T_1, T_2) = (i, j)) = P(T_3 \geq j - i) = (1-p)^{j-i-1}$

Maintenant, $((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i+1}^{+\infty} ((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap ((T_1, T_2) = (i, j)))$

et donc, puisque les unions sont disjointes,

$$\begin{aligned} P((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2)) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} P((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap ((T_1, T_2) = (i, j))) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} P((T_1 + T_3 \geq T_2) \mid ((T_1, T_2) = (i, j))) \cdot P((T_1, T_2) = (i, j)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} (1-p)^{j-i-1} \cdot p(1-p)^{i-1} \cdot p(1-p)^{j-1} \right) \\ P((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2)) &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} (1-p)^{2j-3} \right) \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser deux fois la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique. Dans un premier temps,

$$\sum_{j=i+1}^{+\infty} (1-p)^{2j-3} = \frac{(1-p)^{2i-1}}{1-(1-p)^2} = \frac{(1-p)^{2i-1}}{2p-p^2}$$

puis $P((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2)) = \frac{p}{2-p} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-1} = \frac{p}{2-p} \frac{1-p}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{(2-p)^2}$

De manière similaire, on a clairement

$$P((T_2 + T_3 \geq T_1) \cap (T_2 < T_1)) = P((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2)) = \frac{1-p}{(2-p)^2}$$

Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de l'évènement $(T_1 = T_2)$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned} P((T_1 = T_2)) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(T_1 = T_2 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(T_1 = i) \cdot P(T_2 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2i-2} \\ &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} \\ P((T_1 = T_2)) &= \frac{p}{2-p} \end{aligned}$$

d'où $P(E) = 2 \cdot \frac{1-p}{(2-p)^2} + \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p) + p(2-p)}{(2-p)^2}$

et pour conclure

$$P(E) = \frac{2-p^2}{(2-p)^2}$$

Remarque : Si on cherche la probabilité que C_3 termine dernier au sens strict, il faut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans $(\star)$. On rajoute alors un facteur $(1-p)$ dans le calcul de $P((T_1 + T_3 > T_2) \cap (T_1 < T_2))$ par rapport à celui de $P((T_1 + T_3 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2))$. Au final, la probabilité de l'évènement E devient avec $q = 1-p$

$$P(E) = 2 \cdot \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2} + \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)^2 + p(2-p)}{(2-p)^2} = \frac{p^2 - 2p + 2}{(2-p)^2} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}$$

- (a). Soit $\lambda > 0$ et X_λ une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geq \epsilon\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

- (b). Soient $\lambda > 0$ et $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ et D_λ quatre variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.
- (c). Même question avec $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$

- (a). Il suffit d'appliquer l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev. Puisque X_λ admet λ pour espérance et λ pour variance, alors

$$\forall \rho > 0, \quad P(|X_\lambda - \lambda| \geq \rho) \leq \frac{\lambda}{\rho^2}$$

On prend $\rho = \epsilon\lambda$ et il vient

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geq \epsilon\lambda) \leq \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \lambda}$$

et en particulier

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geq \epsilon\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

- (b). Notons R l'évènement « Le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ a ses deux racines réelles »

Le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ a ses deux racines réelles si et seulement si $(B_\lambda)^2 - 4A_\lambda C_\lambda \geq 0$. Considérons donc l'évènement

$$E = ((B_\lambda)^2 < 4A_\lambda C_\lambda)$$

On a donc $R = \overline{E}$. Montrons que la probabilité de E converge vers 1 lorsque λ tend vers $+\infty$. A cet effet, fixons $\epsilon > 0$ et posons

$$E_A = (A_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda) \quad E_C = (C_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda) \quad \text{et} \quad E_B = (B_\lambda \leq (1 + \epsilon)\lambda)$$

Notons que, d'après le résultat de la question précédente, les probabilités de E_A, E_C et E_B tendent vers 1 lorsque λ tend vers $+\infty$, puisque

$$\forall X \in \{A, B, C\}, \quad \overline{E_X} \subset (|X_\lambda - \lambda| \geq \epsilon\lambda)$$

Puisque les variables aléatoires sont indépendantes, on a ainsi

$$P(E_A \cap E_B \cap E_C) = P(E_A) \cdot P(E_B) \cdot P(E_C) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 1$$

Il ne reste donc plus qu'à choisir ϵ pour que $E_A \cap E_B \cap E_C$ soit inclus dans E . Remarquons pour cela que

$$(A_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda) \quad C_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda \quad \text{et} \quad (B_\lambda \leq (1 + \epsilon)\lambda) \implies (B_\lambda)^2 \leq (1 + \epsilon)^2 \lambda^2 \quad \text{et} \quad 4A_\lambda C_\lambda \geq 4(1 - \epsilon)^2 \lambda^2$$

Il suffit donc de prendre ϵ tel que

$$(1 + \epsilon)^2 < 4(1 - \epsilon)^2 \quad \text{soit} \quad 1 + \epsilon < 2(1 - \epsilon) \quad \text{soit} \quad \epsilon < \frac{1}{3}$$

Avec ce choix, on obtient un évènement $E_A \cap E_B \cap E_C$, inclus dans E , et donc la probabilité tend vers 1 lorsque λ tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que la probabilité de E tend également vers 1 lorsque λ tend vers $+\infty$, donc son complémentaire R a lui une probabilité de limite nulle. On peut donc conclure que

La probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

15

(***)

X PC 2016

Cinq compères sont autour d'une table ronde. Deux voisins ont chacun un ballon. A chaque tour, une personne ayant un ballon le donne à son voisin de gauche ou à son voisin de droite avec une probabilité égale à 1/2. Déterminer le nombre moyen de tours nécessaires pour qu'une personne récupère les deux ballons.

Pour simplifier le problème, commençons par remarquer que la distance entre les deux ballons est au maximum de 2 personnes. On généralise donc le problème en définissant trois variables aléatoires X_0, X_1 et X_2 qui donnent chacune le nombre de tours nécessaire pour qu'une personne récupère le ballon à partir d'une configuration initiale où les 2 ballons sont à distances respectives 0, 1 et 2 (X_0 est donc la variable aléatoire nulle). Le problème consiste alors à déterminer l'espérance de X_1 .

Remarquons maintenant que si le ballon est à distance 1 (donc dans les mains de 2 voisins), alors

- avec probabilité $1/2$, les deux voisins lancent les 2 balles du même côté et les ballons restent à distance 1 ;
- avec probabilité $1/4$, ils lancent leur balle dans la direction de l'autre et les ballons restent à nouveau à distance 1 ;
- avec probabilité $1/4$, ils lancent les balles dans la direction opposée à l'autre possesseur de balle et les ballons se retrouvent à distance 2.

On vérifie facilement de manière similaire que si les balles sont à distance 2, alors elles restent à distance 2 avec probabilité $1/2$, reviennent à distance 1 avec probabilité $1/4$, et atterrissent dans les mains de la même personne avec probabilité $1/4$. On en déduit alors les relations de récurrences suivantes : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_1 = k) = \frac{3}{4}P(X_1 = k-1) + \frac{1}{4}P(X_2 = k-1) \quad (1)$$

et
$$P(X_2 = k) = \frac{1}{2}P(X_2 = k-1) + \frac{1}{4}P(X_1 = k-1) + \frac{1}{4}P(X_0 = k-1) \quad (2)$$

Admettons pour l'instant que X_1 et X_2 admettent une espérance. Multiplions ces deux égalités par k et sommons pour k allant de 1 à $+\infty$. Il vient pour (1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X_1 = k) &= \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X_1 = k-1) + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_2 = k-1) \\ &= \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) P(X_1 = k) + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) P(X_2 = k) \end{aligned}$$

En notant que pour tout entier i ,

$$E(X_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X_i = k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_i = k) = 1$$

on obtient
$$E(X_1) = \frac{3}{4}E(X_1) + \frac{1}{4}E(X_2) + 1 \quad (3)$$

De manière totalement similaire, l'égalité (2) donne

$$E(X_2) = \frac{1}{2}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_1) + E(X_0) + 1 \quad (4)$$

La variable X_0 étant nulle, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{1}{4}E(X_1) - \frac{1}{4}E(X_2) = 1 \\ -\frac{1}{4}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad E(X_1) = 12 \quad \text{et} \quad E(X_2) = 8$$

On en déduit donc que

Il faut en moyenne 12 tours pour qu'une personne récupère les 2 ballons.

Il reste cependant à justifier que les espérances des variables aléatoires X_1 et X_2 sont bien définies. Pour cela, on peut remarquer que X_0 étant nulle, les égalités (1) et (2) s'écrivent

$$\forall k \geq 2, \quad Z_k = A \cdot Z_{k-1} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_k = \begin{pmatrix} P(X_1 = k) \\ P(X_2 = k) \end{pmatrix}$$

Alors,
$$\chi_A = X^2 - \frac{5}{4}X - \frac{5}{16}$$

de sorte que A admet deux valeurs propres réelles

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

La matrice A est donc diagonalisable et admet deux vecteurs propres Y_1 et Y_2 associé respectivement à λ_1 et λ_2 . Si l'on décompose Z_2 dans cette base, on obtient deux réels α et β tels que

$$Z_2 = \alpha Y_1 + \beta Y_2 \quad \text{puis} \quad \forall k \geq 2, \quad Z_k = \alpha \lambda_1^{k-2} Y_1 + \beta \lambda_2^{k-2} Y_2$$

Cette égalité implique en particulier que les suites $(P(X_1 = k))_{k \geq 2}$ et $(P(X_2 = k))_{k \geq 2}$ sont combinaisons linéaires des suites $(\lambda_1^k)_{k \geq 2}$ et $(\lambda_2^k)_{k \geq 2}$ d'où puisque $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$,

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad P(X_i = k) = O(\lambda_1^k) \quad \text{puis} \quad k P(X_i = k) = O(k \lambda_1^k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

ce qui assure la convergence des séries définissant $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

16

(**)

Mines PC 2016

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite $(X_k)_{k \in [1; n]}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur $[1; p]$. On pose alors $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

- (a). Déterminer la loi de M_n .
 (b). En déduire l'espérance de M_n , et déterminer la limite de $E(M_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter.

- (a). Il est clair que M_n est à valeurs dans $\llbracket 1; p \rrbracket$. Fixons $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. On a clairement

$$(M_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k) \quad \text{d'où} \quad P((M_n \leq k)) = \prod_{i=1}^n P((X_i \leq k))$$

et puisque chacun des X_i suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; p \rrbracket$,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P((X_i \leq k)) = \frac{k}{p} \quad \text{et} \quad P((M_n \leq k)) = \frac{k^n}{p^n}$$

qui reste valable pour $k = 0$. Cela permet d'obtenir la loi de M_n compte tenu de l'égalité

$$(M_n = k) = (M_n \leq k) \setminus (M_n \leq k-1)$$

Il vient pour finir

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad P((M_n = k)) = \frac{k^n - (k-1)^n}{p^n}$$

- (b). On a directement par définition de l'espérance

$$E(M_n) = \frac{1}{p^n} \sum_{k=1}^p k [k^n - (k-1)^n]$$

On peut simplifier légèrement cette expression en séparant et réindexant la somme ce qui donne

$$\sum_{k=1}^p k [k^n - (k-1)^n] = \sum_{k=1}^p k \cdot k^n - \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) \cdot k^n = p^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} k^n$$

et finalement

$$E(M_n) = p - \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p} \right)^n$$

La somme est une somme finie de termes de suites géométriques de raison strictement inférieure à 1. Elle est donc de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$E(M_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$$

Ce résultat est intuitif dans le sens où plus le nombre de variables est grand, plus la probabilité d'obtenir la valeur maximale p avec au moins l'un d'entre elle est importante et, par voie de conséquence, plus l'espérance est proche de cette valeur.

17

(**)

Une grenouille monte les marches d'un escalier en sautant à chaque étape une marche avec probabilité $1/2$ et deux marches d'un coup avec probabilité $1/2$. On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts, et Y_n le nombre de fois où la grenouille n'a sauté qu'une seule marche sur ses n premiers sauts.

- (a). Déterminer la loi de Y_n . Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.
 (b). On note N_p le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la p -ième marche, c'est-à-dire le plus petit entier tel que $X_{N_p} \geq p$. Exprimer pour $p \geq 2$ et $k \geq 1$ la probabilité $P(N_p = k)$ en fonction des probabilités $P(N_{p-1} = k-1)$ et $P(N_{p-2} = k-1)$. En déduire que

$$E(N_p) = \frac{1}{2}E(N_{p-1}) + \frac{1}{2}E(N_{p-2}) + 1$$

- (c). En déduire l'espérance de N_p et un équivalent de $E(N_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$. Commenter.

- (a). Il est clair que Y_n suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$. Si la grenouille effectue Y_n sauts de une marche parmi ses n premiers sauts, elle effectue $(n - Y_n)$ sauts de 2 marches. Par conséquent,

$$X_n = 2(n - Y_n) + Y_n = 2n - Y_n$$

La variable aléatoire X_n est ainsi à valeurs dans $\llbracket n; 2n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket n; 2n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - (2n - k)} = \frac{1}{4^n} \binom{n}{2n - k}$$

puis
$$E(X_n) = 2n - E(Y_n) = 2n - \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X_n) = (-1)^2 V(Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$$

soit

$$E(X_n) = \frac{3n}{2} \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{n}{4}$$

(b). La famille $\{(X_1 = 1), (X_1 = 2)\}$ forme un système complet d'évènements. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient

$$P(N_p = k) = P((N_p = k) \cap (X_1 = 1)) + P((N_p = k) \cap (X_1 = 2))$$

Notons que

$$P((N_p = k) \cap (X_1 = 1)) = \frac{1}{2} P(N_{p-1} = k - 1) \quad (\star)$$

car la probabilité de ne dépasser la case p qu'au k -ième saut lorsque l'on saute une marche au premier saut est la même que de dépasser la case $p - 1$ seulement au $(k - 1)$ -ième saut (une preuve plus rigoureuse est rédigée en fin d'exercice).

De la même manière

$$P((N_p = k) \cap (X_1 = 2)) = \frac{1}{2} P(N_{p-2} = k - 1)$$

et par conséquent

$$P(N_p = k) = \frac{1}{2} (P(N_{p-1} = k - 1) + P(N_{p-2} = k - 1))$$

Fixons maintenant $p \geq 2$. On multiplie par k l'égalité précédente puis on somme pour k allant de 1 à $+\infty$. Notons que la série converge en réalité puisque N_p est à valeurs dans $\llbracket \lceil p/2 \rceil; p \rrbracket$ donc la probabilité $P(N_p = k)$ est nulle pour $k > p$. On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P((N_p = k)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P((N_{p-1} = k - 1)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P((N_{p-2} = k - 1))$$

Le terme de gauche est égal à $E(N_p)$ (puisque le terme d'indice 0 de la somme est nulle). Pour les termes de droite, on effectue un changement d'indice pour aboutir à

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P((N_{p-1} = k - 1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k + 1) \cdot P((N_{p-1} = k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P((N_{p-1} = k)) + \sum_{k=0}^{+\infty} P((N_{p-1} = k)) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P((N_{p-1} = k - 1)) &= E(N_{p-1}) + 1 \end{aligned}$$

On a bien entendu une formule similaire pour la deuxième somme du terme de droite, ce qui permet de conclure.

$$\forall p \geq 2, \quad E(N_p) = \frac{1}{2} E(N_{p-1}) + \frac{1}{2} E(N_{p-2}) + 1$$

(c). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier p , on pose $u_p = E(N_p) - \alpha p$ de sorte que

$$\forall p \geq 2, \quad u_p + \alpha p = \frac{1}{2} (u_{p-1} + \alpha(p - 1)) + \frac{1}{2} (u_{p-2} + \alpha(p - 2)) + 1$$

soit

$$u_p = \frac{1}{2} u_{p-1} + \frac{1}{2} u_{p-2} + 1 - \frac{3\alpha}{2}$$

En prenant $\alpha = 2/3$, on obtient que $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, sans second membre cette fois, dont l'équation caractéristique est

$$r^2 = \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{de racines} \quad r_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_p = E(N_p) - \frac{2p}{3} = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^p$$

et puisque

$$u_0 = E(N_0) = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = E(N_1) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

on trouve $\alpha = -\beta = 2/9$ et finalement

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad E(N_p) = \frac{2p}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^p \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2p}{3}$$

Le résultat n'est pas surprenant. En moyenne, la grenouille fait des bonds de $3/2$ marches par saut. Il lui faut donc approximativement $p/(3/2)$ sauts pour dépasser la p -ième marche.

Preuve de $(\star)$: Pour tout entier i , notons S_i le nombre de marches (dans $\{1, 2\}$) franchies lors du i -ième saut, de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \sum_{k=1}^n S_k$$

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont supposées mutuellement indépendantes. Soient $k \geq 1$ et $p \geq 2$. Par définition,

$$(N_p = k) = (X_1 + \dots + X_{k-1} < p) \cap (X_1 + \dots + X_k \geq p)$$

$$\text{puis} \quad ((N_p = k) \cap (X_1 = 1)) = (X_1 = 1) \cap (X_2 + \dots + X_{k-1} < p-1) \cap (X_2 + \dots + X_k \geq p-1)$$

Notons par conséquent $A_{k-1, p-1}$ l'ensemble (fini) de toutes les suites finies $a = (a_i)_{i \in [2, k]}$ de $k-1$ éléments et à valeurs dans $\{1, 2\}$ telles que

$$a_2 + \dots + a_{k-1} < p-1 \quad \text{et} \quad a_2 + \dots + a_k \geq p-1$$

On a alors la réunion disjointe

$$((N_p = k) \cap (X_1 = 1)) = \bigcup_{a \in A_{k-1, p-1}} (X_1 = 1, X_2 = a_2, \dots, X_k = a_k)$$

Par indépendance mutuelle, il vient

$$P(((N_p = k) \cap (X_1 = 1))) = \sum_{a \in A_{k-1, p-1}} P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = a_2) \cdots P(X_k = a_k)$$

et puisque chaque X_i suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$,

$$P(((N_p = k) \cap (X_1 = 1))) = \sum_{a \in A_{k-1, p-1}} \frac{1}{2^k} = \frac{\text{card}(A_{k-1, p-1})}{2^k}$$

Mais un raisonnement similaire montre que

$$\begin{aligned} (N_{p-1} = k-1) &= (X_1 + \dots + X_{k-2} < p-1) \cap (X_1 + \dots + X_{k-1} \geq p-1) \\ &= \bigcup_{a \in A_{k-1, p-1}} (X_1 = a_2, \dots, X_{k-1} = a_k) \end{aligned}$$

$$\text{puis} \quad P((N_{p-1} = k-1)) = \sum_{a \in A_{k-1, p-1}} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\text{card}(A_{k-1, p-1})}{2^{k-1}}$$

$$\text{soit bien} \quad P(((N_p = k) \cap (X_1 = 1))) = \frac{1}{2} P((N_{p-1} = k-1)) \quad (\star)$$

18 ————— (***) —————

Une puce se déplace une règle graduée infinie en partant de la position 0. A chaque instant, elle effectue un saut de une unité vers la droite avec probabilité $1/2$ ou un saut vers la gauche avec probabilité $1/2$. Sa position après n sauts est notée X_n avec $X_0 = 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $U_n = X_n - X_{n-1}$, qui suit donc une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On suppose que les sauts sont indépendants, de sorte que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On va justifier qu'avec une probabilité égale à 1, la marche de la puce est non bornée. On notera B l'ensemble « la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée » et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note B_m l'ensemble « la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[-m; m]$ ». On note pour finir pour tous entiers $n, m \geq 1$

$$A_{n,m} = \{\forall k \in \llbracket 1; 2m \rrbracket, \quad U_{(2n-1)m+k} = 1\}$$

(a). Vérifier que $B = \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m$ et en déduire que B est un évènement.

(b). On fixe un entier $m \geq 1$.

(i) Décrire $A_{5,3}$, puis $A_{6,3}$. Justifier que les évènements $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

(ii) Soit $n \geq 1$. Calculer $P(A_{n,m})$. En déduire que l'évènement « une infinité d'évènements parmi $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ se réalise » est de probabilité 1.

$$\text{(iii) En déduire que} \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{n,m}\right) = 1$$

- (iv) Montrer que $A_{n,m} \subset \overline{B_{m-1}}$ pour tout entier $n \geq 1$, puis que $P(B_{m-1}) = 0$.
 (c). Conclure.

- (a). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs quelconque. On justifie sans difficulté l'équivalence

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \iff \exists m \in \mathbb{N}, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est à valeurs dans } [-m; m]$$

ce qui justifie immédiatement l'égalité

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

Justifions maintenant que B_m est un évènement pour tout entier m . En effet, puisque X_n est une variable aléatoire pour tout entier $n \geq 1$, alors $(X_n = k)$ est un évènement pour tout entier k , puis

$$(X_n \in \llbracket -m; m \rrbracket) = \bigcup_{k=-m}^m (X_n = k)$$

est une réunion finie d'évènement donc un évènement. Par suite,

$$B_m = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X_n \in \llbracket -m; m \rrbracket)$$

est également un évènement par intersection dénombrable d'évènements. Ceci étant valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, B est une réunion dénombrable d'évènements et ainsi

L'ensemble B est un évènement.

- (b). (i) Par définition,

$$A_{5,3} = (U_{28} = U_{29} = \dots = U_{33} = 1)$$

et

$$A_{6,3} = (U_{34} = U_{35} = \dots = U_{39} = 1)$$

Dans les deux, une issue réalise cette expérience si et seulement si la puce effectue 6 pas consécutifs vers la droite (du 28-ième au 33-ième dans le premier cas, du 34-ième au 39-ième dans le second). On peut ainsi remarquer que si $n_1, \dots, n_p$ sont des entiers 2 à 2 distincts, alors $A_{n_1,m}, \dots, A_{n_p,m}$ sont définis par des familles 2 à 2 disjointes de variables aléatoires indépendantes. En particulier, ces évènements sont indépendants. Ceci étant valable quels que soient $n_1, \dots, n_p$, il s'ensuit que

Les évènements $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

- (ii) Puisque les variables $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes,

$$P(A_{n,m}) = \prod_{k=1}^{2m} P(U_{(2n-1)m+k} = 1) = \prod_{k=1}^{2m} \frac{1}{2}$$

et donc

$$P(A_{n,m}) = \frac{1}{4^m}$$

Soit F l'évènement « une infinité d'évènements parmi $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ se réalise ». En termes ensemblistes,

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} A_{k,m} \quad \text{d'où} \quad \overline{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_{k,m}}$$

Montrons que $P(\overline{F}) = 0$. Soit $n \geq 1$. Alors,

$$\bigcap_{k \geq n} \overline{A_{k,m}} = \bigcap_{N \geq n} \left(\bigcap_{k=N}^N \overline{A_{k,m}} \right)$$

d'où par continuité décroissante et indépendance

$$P \left[\bigcap_{k \geq n} \overline{A_{k,m}} \right] = \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left[\bigcap_{k=N}^N \overline{A_{k,m}} \right] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=N}^N P[\overline{A_{k,m}}] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{4^m} \right)^{N-n+1} = 0$$

puis

$$P(\overline{F}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P \left[\bigcap_{k \geq n} \overline{A_{k,m}} \right] = 0$$

Finalement, $P(\overline{F}) = 0$ donc $P(F) = 1$ et ainsi,

L'évènement « une infinité d'évènements parmi $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ se réalise » est de probabilité 1.

- (iii) Si une infinité d'évènements parmi $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ se réalise, alors en particulier au moins l'un d'entre eux se réalise. Plus rigoureusement,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} A_{k,m} \subset \bigcup_{k \geq 1} A_{k,m}$$

puisque l'intersection est donc comprise dans le premier terme. En passant aux probabilités, il vient

$$P \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} A_{k,m} \right) = 1 \leq P \left(\bigcup_{k \geq 1} A_{k,m} \right)$$

et puisque la variable k est muette,

$$\boxed{P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{n,m} \right) = 1}$$

- (iv) Soit $\omega \in A_{n,m}$. Alors par définition,

$$\forall k \in \llbracket 1; 2m \rrbracket, \quad U_{(2n-1)m+k}(\omega) = 1 \quad \text{d'où} \quad X_{(2n+1)m}(\omega) = X_{(2n-1)m}(\omega) + 2m$$

En particulier, on ne peut pas avoir à la fois $X_{(2n+1)m}(\omega)$ et $X_{(2n-1)m}(\omega)$ tous deux dans $\llbracket -(m-1); m-1 \rrbracket$ car sinon, leur différence serait majorée par $2(m-1)$. Ainsi, la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas à valeurs dans $\llbracket -(m-1); m-1 \rrbracket$, ce qui prouve bien que

$$\boxed{A_{n,m} \subset \overline{B_{m-1}}}$$

Puisque chaque $A_{n,m}$ est inclus dans B_{m-1} , leur réunion également et donc

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{n,m} \subset \overline{B_{m-1}} \quad \text{puis} \quad P \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{n,m} \right) = 1 \leq P(\overline{B_{m-1}})$$

Finalement, $P(\overline{B_{m-1}}) = 1$ et donc

$$\boxed{P(B_{m-1}) = 0}$$

- (c). On a donc justifié que $P(B_m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc la réunion dénombrable des $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est également nulle. En d'autres termes, B est de probabilité nulle, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{L'évènement « la marche de la puce n'est pas bornée » est un évènement certain.}}$$