

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1 Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée car $|x_1| = |x_1|$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) (1 + x_{n+1}) - 1 \right| \\ &= \left| \left(\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right) (1 + x_{n+1}) + x_{n+1} \right| \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire donne que

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| (1 + |x_{n+1}|) + |x_{n+1}|$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors que

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &\leq \left(\left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1 \right) (1 + |x_{n+1}|) + |x_{n+1}| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + |x_k|) \right) - 1 \end{aligned}$$

et on en déduit $\mathcal{P}(n+1)$.

- Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

2 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1; +\infty[^n$. En utilisant l'inégalité de convexité $1+u \leq e^u$ qui est valable pour tout $u \in \mathbb{R}$, on obtient que $1+x_k \leq e^{x_k}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De plus, comme les x_k sont choisis dans $[-1; +\infty[$ on a $1+x_k \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et cela permet d'effectuer la majoration

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$$

Ainsi, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1; +\infty[^n \quad \prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$

3 Soit $t \in \mathbb{C}$. La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, et son développement s'écrit

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Grâce à cette expression, et à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|(1+t) - e^t| = \left| -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!}$$

Mais remarquons que $(k-2)! \leq k!$ pour tout $k \geq 2$, donc en passant à l'inverse,

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-2)!}$$

En injectant cette inégalité dans l'inégalité précédente, il vient

$$|(1+t) - e^t| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{(k-2)!} = |t|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n}{n!}$$

avec le changement d'indice $n = k - 2$ pour obtenir la dernière série. On reconnaît alors la série définissant $e^{|t|}$ et on en déduit bien que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{C} \quad |(1+t) - e^t| \leq |t|^2 e^{|t|}}$$

4 Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et posons $M = \max\{|a|, |b|\}$. En utilisant la factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, c'est-à-dire l'égalité

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

et l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$|a^n - b^n| = |a - b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \right| \leq |a - b| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^{n-1-k} |b|^k$$

Mais par définition de M on a $|a| \leq M$ et $|b| \leq M$, donc le k -ième terme de la somme ci-dessus peut être majoré par $M^{n-1-k} M^k = M^{n-1}$. Comme cette majoration est indépendante de k , et qu'il y a n termes dans la somme, on en conclut bien que

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |a^n - b^n| \leq n M^{n-1} |a - b|}$$

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $z \in \mathbb{C}$. Par propriétés de l'exponentielle, on a $e^z = (e^{z/n})^n$ donc, d'après la question 4,

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z \right| = \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - (e^{z/n})^n \right| \leq n M^{n-1} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right|$$

où M est défini par

$$M = \max \left\{ \left| 1 + \frac{z}{n} \right|, |e^{z/n}| \right\}$$

D'une part, en utilisant encore une fois l'inégalité de convexité $1 + u \leq e^u$ qui est valable pour tout $u \in \mathbb{R}$, et l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| 1 + \frac{z}{n} \right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{|z|/n}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité triangulaire et au développement en série entière de l'exponentielle,

$$|e^{z/n}| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{n}\right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{z}{n} \right|^k = e^{|z|/n}$$

et on déduit de ces deux inégalités que $M \leq e^{|z|/n}$. Enfin, en utilisant le résultat de la question 3 avec $t = z/n$, on a

$$\left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right| \leq \frac{|z|^2}{n^2} e^{|z|/n}$$

Si on injecte cette inégalité ainsi que la borne sur M dans l'inégalité initiale, on obtient que

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq n e^{(n-1)\frac{|z|}{n}} \frac{|z|^2}{n^2} e^{|z|/n}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$$

6 À la question 5, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - e^z| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n}$$

Le terme de droite dans cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini par croissance comparée, donc un passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^z$$

II. EXEMPLES DE CALCUL DE PRODUIT INFINI

7 Calculons le premier produit infini en définissant son produit partiel

$$\forall N \geq 2 \quad P_N = \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

et en essayant d'évaluer sa limite lorsque N tend vers l'infini. En écrivant que

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n}$$

on remarque que si on définit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ par $u_n = \frac{n}{n-1}$, alors on a

$$P_N = \prod_{n=2}^N \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On reconnaît ici un produit télescopique, que l'on sait calculer :

$$P_N = \frac{u_{N+1}}{u_2} = \frac{N+1}{2N} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient finalement que

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Calculons de la même manière le second produit. Définissons son produit partiel

$$\forall N \geq 2 \quad \tilde{P}_N = \prod_{n=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

et suivons l'indication en nous intéressant à $\tilde{P}_{2N}$. Le $(-1)^{n+1}$ qui est présent dans le terme général de ce produit partiel suggère qu'il faut distinguer selon la parité de l'indice n . En scindant $\tilde{P}_{2N}$ en deux produits, le premier portant sur les indices $n \in \llbracket 2; 2N \rrbracket$ qui sont pairs, et le second sur les impairs, on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2N} &= \prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \\ &= \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} \right) \times \prod_{k=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^{2k-1+1}}{2k-1} \right) \\ \tilde{P}_{2N} &= \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \times \prod_{k=2}^N \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) \end{aligned}$$

Regroupons à présent ces deux produits en un seul, en isolant le terme pour $k=1$ du premier produit :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2N} &= \frac{1}{2} \prod_{k=2}^N \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \prod_{k=2}^N \left(\frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \prod_{k=2}^N 1 \\ \tilde{P}_{2N} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La sous-suite $(\tilde{P}_{2N})_{N \geq 2}$ est donc constante égale à $1/2$, ainsi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{2N} = \frac{1}{2}$$

Attention, à ce stade on ne peut pas en déduire la valeur du produit infini, c'est-à-dire la limite de la suite $(\tilde{P}_N)_{N \geq 2}$. En effet, on connaît seulement la limite de la sous-suite $(\tilde{P}_{2N})_{N \geq 2}$. Pour conclure, on doit également trouver la limite de l'autre sous-suite $(\tilde{P}_{2N+1})_{N \geq 2}$.

Pour tout $N \geq 2$,

$$\tilde{P}_{2N+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+1} \right) \tilde{P}_{2N} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2N+1} \right)$$

et avec cette expression, on en déduit également que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{2N+1} = \frac{1}{2}$$

Comme les deux sous-suites $(\tilde{P}_{2N})_{N \geq 2}$ et $(\tilde{P}_{2N+1})_{N \geq 2}$ convergent et partagent la même limite, on en déduit que la suite $(\tilde{P}_N)_{N \geq 2}$ converge vers cette limite, et donc finalement

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \frac{1}{2}}$$

8 Soit $n \in \mathbb{N}$. Intégrons par parties l'intégrale définissant W_{n+2} , en dérivant la fonction $u \mapsto \cos^{n+1} u$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$) et en intégrant la fonction $u \mapsto \cos u$ (dont la primitive $u \mapsto \sin u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$) :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin u \times \cos^{n+1} u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin u \times (n+1)(-\sin u) \cos^n u \, du \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^n u \, du \end{aligned}$$

En remarquant que $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$, il vient

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

De cette relation de récurrence, on obtient en remplaçant n par $2n-1$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$$

et en itérant,

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} W_{2n-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3} W_1 \\ W_{2n+1} &= \frac{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2]^2}{[(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3] \times [(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2]} W_1 \end{aligned}$$

En factorisant par 2 chaque terme du produit, on voit que le numérateur est égal à $(2^n n!)^2$, tandis qu'au dénominateur on reconnaît $(2n+1)!$. Enfin, un simple calcul montre que

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = [\sin u]_0^{\pi/2} = 1$$

donc finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

9 Pour déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, on utilise l'expression prouvée à la question 8 et la formule de Stirling qui donne un équivalent de la factorielle

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

On obtient alors en remarquant que $(2n+1)! = (2n+1) \cdot (2n)!$:

$$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{2n+1} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$$

Une preuve plus classique de ce résultat consiste à d'abord remarquer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puisque $\cos u$ est à valeurs dans $[0; 1]$ lorsque $u \in [0; \pi/2]$. Par conséquent, d'après la formule de récurrence de la question 8,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

d'où $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$. Remarquons que cette formule de récurrence donne également que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à son terme initial qui vaut $\pi/2$. Ainsi,

$$(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nW_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

et alors

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

On obtient le même résultat qu'avant en remplaçant n par $2n+1$.

Soit $N \geq 1$, considérons le produit partiel

$$P_N = \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right)$$

Il peut être réécrit sous la forme :

$$P_N = \prod_{n=1}^N \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1} \right) = \prod_{n=1}^N \left(\frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \right) = \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n-1} \right) \times \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} \right)$$

Mais remarquons que par un changement d'indice,

$$\prod_{n=1}^N (2n-1) = \prod_{n=2}^N (2n-1) = \prod_{n=1}^{N-1} (2n+1) = \frac{1}{2N+1} \prod_{n=1}^N (2n+1)$$

donc il vient

$$\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n-1} = (2N+1) \prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1}$$

si bien que

$$P_N = (2N+1) \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} \right)^2$$

Il suffit maintenant de calculer le produit qui est à droite de cette égalité. Comme dans la question 8, si l'on substitue n par $2n-1$ dans la relation de récurrence satisfaite par la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+1)W_{2n+1} = 2nW_{2n-1}$$

Par conséquent,

$$\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} = \prod_{n=1}^N \frac{W_{2n+1}}{W_{2(n-1)+1}} = \frac{W_{2N+1}}{W_1}$$

car on reconnaît ici un produit télescopique. Dès lors, en se rappelant que $W_1 = 1$ et en utilisant l'équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on vient de prouver, on en déduit que

$$P_N = (2N+1)W_{2N+1}^2 \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 2N \sqrt{\frac{\pi}{4N}}^2 = \frac{\pi}{2}$$

En conclusion,

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2}}$$

Signalons que l'utilisation par l'énoncé d'accolades pour désigner des familles de vecteurs est sujette à discussion, puisque de telles familles ne sont pas des ensembles. Pour cette raison, nous utiliserons dans ce corrigé des parenthèses en lieu et place des accolades de l'énoncé.

1. TRACES ET PROJECTEURS

1 Notons $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour calculer la trace de $\mathbb{A}\mathbb{B}$ et celle de $\mathbb{B}\mathbb{A}$, commençons par calculer leurs éléments diagonaux. Avec la formule donnant les termes d'une matrice produit, on a, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \quad \text{et} \quad (\mathbb{B}\mathbb{A})_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}.$$

Par conséquent,
$$\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_{i=1}^n (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$$

Cette somme double étant finie, on peut intervertir l'ordre de sommation, de sorte que

$$\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^n (\mathbb{B}\mathbb{A})_{kk}$$

soit

$$\boxed{\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})}$$

2 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de X et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: on sait que $T_{\mathcal{B}} = QT_{\mathcal{B}'}Q^{-1}$. En utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_{\mathcal{B}}) &= \text{tr}(QT_{\mathcal{B}'}Q^{-1}) \\ &= \text{tr}((QT_{\mathcal{B}'})Q^{-1}) \\ &= \text{tr}(Q^{-1}(QT_{\mathcal{B}'})) \\ &= \text{tr}(Q^{-1}QT_{\mathcal{B}'}) \\ \text{tr}(T_{\mathcal{B}}) &= \text{tr}(T_{\mathcal{B}'}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La trace de } T_{\mathcal{B}} \text{ est indépendante de la base } \mathcal{B}.$$

On prendra garde à ne pas faire dire au résultat de la question 1 ce qu'il ne dit pas : de façon générale, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont trois matrices, alors $\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C})$ prend des valeurs différentes par permutation de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$: par exemple, $\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) \neq \text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{C}\mathbb{B})$ en général. Il faut donc bien grouper les matrices avant d'utiliser la propriété $\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$.

3 On peut par exemple montrer que $R(P) \cap N(P) = \{0\}$ et vérifier que l'égalité de dimensions $\dim X = \dim R(P) + \dim N(P)$ est vraie.

- Soit $x \in R(P) \cap N(P)$. Comme $x \in R(P)$, il existe $\xi \in X$ tel que $x = P(\xi)$. Alors, puisque $x \in N(P)$, on a $P(x) = 0 = P^2(\xi)$. Or, $P^2 = P$ car P est un projecteur : ainsi, $0 = P^2(\xi) = P(\xi)$, d'où $x = 0$. Cela montre que $R(P) \cap N(P) \subset \{0\}$. Réciproquement, on a bien $0 \in R(P) \cap N(P)$. Ainsi, $R(P) \cap N(P) = \{0\}$.
- D'après la formule du rang, $\dim X = \dim N(P) + \text{rg } P = \dim N(P) + \dim R(P)$.

En conclusion,

$$\boxed{X = R(P) \oplus N(P)}$$

Une autre façon de faire est de montrer que $R(P) \cap N(P) = \{0\}$ et que $X = R(P) + N(P)$. Pour cette dernière égalité, il est aisé de vérifier

que si $x \in X$, il se décompose selon cette somme en $x = P(x) + (x - P(x))$.
 En effet, $P(x) \in R(P)$ par définition de l'image de P et $x - P(x) \in N(P)$
 car $P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$.

4 Déterminons la matrice de P dans une base adaptée à la décomposition en somme directe obtenue à la question précédente afin de calculer la trace de P .

Soient $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $R(P)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $N(P)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de X car $X = R(P) \oplus N(P)$. Pour trouver la matrice de P dans cette base, décomposons sur celle-ci chacun des vecteurs $P(e_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Si $i \in \llbracket r+1; n \rrbracket$, alors $e_i \in N(P)$ et il vient immédiatement $P(e_i) = 0$. Si maintenant $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, alors $e_i \in R(P)$: il existe f_i appartenant à X tel que $e_i = P(f_i)$. Dans ce cas, $P(e_i) = P^2(f_i) = P(f_i)$ puisque P est un projecteur. Ainsi, $P(e_i) = e_i$ lorsque $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. La matrice de P dans la base $\mathcal{B}$ est donc la suivante :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P(e_1) & P(e_r) & P(e_{r+1}) & P(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right]$$

D'après la question 2, la trace de P est égale à la trace de la matrice précédente, donc $\text{tr } P = \text{tr } \mathbb{I}_r = r$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{tr } P = \text{rg } P}$$

5 Traitons d'abord la première égalité proposée, en procédant par double inclusion. Soit d'abord $x \in R(P')$: il existe $\xi \in X$ tel que $x = P'(\xi)$. En se souvenant que $P^2 = P$, on obtient

$$P(x) = P(P'(\xi)) = P(\xi - P(\xi)) = P(\xi) - P(\xi) = 0$$

Ainsi, $x \in N(P)$ pour tout $x \in R(P')$, ce qui signifie que $R(P') \subset N(P)$.

Réciproquement, soit $x \in N(P)$. Par définition même de P' , on a $P'(x) = x - P(x)$. Or $P(x) = 0$, ce qui entraîne que $x = P'(x)$. Par conséquent $x \in R(P')$ pour tout $x \in N(P)$. Autrement dit, $N(P) \subset R(P')$ et finalement

$$\boxed{R(P') = N(P)}$$

Pour l'autre égalité à montrer, remarquons que l'endomorphisme P' est un projecteur puisque

$$P'^2 = (I - P)(I - P) = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = P'$$

Comme $P = I - P'$, les projecteurs P et P' jouent des rôles symétriques. En les échangeant dans l'égalité obtenue précédemment, il vient

$$\boxed{R(P) = N(P')}$$

Pour la première égalité demandée par exemple, au lieu de montrer les deux inclusions, on peut seulement en établir une et montrer l'égalité de dimen-

sions $\dim R(P') = \dim N(P)$. En effet, comme P' est un projecteur, la question 4 donne $\operatorname{rg} P' = \operatorname{tr} P'$ et $\operatorname{tr} P' = \operatorname{tr}(I - P) = \operatorname{tr} I - \operatorname{tr} P = n - \operatorname{rg} P$, qui est encore égal à $\dim N(P)$ d'après la formule du rang.

6 Notons $r = \dim F$ et $s = \dim G$. Soient $(f_1, \dots, f_r)$ une base de F , $(g_1, \dots, g_s)$ une base de G et posons $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$. Par définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels, si x est un vecteur de $F + G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. En outre, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i \quad \text{et} \quad z = \sum_{j=1}^s \mu_j g_j$$

d'où $x = y + z \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Cela signifie que $F + G \subset \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Par conséquent, par croissance de la dimension, $\dim(F + G) \leq \dim \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Or, puisque $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$, la dimension de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$ est inférieure au nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ qui est égal à $r + s$. En conclusion,

$$\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$$

La question peut se régler directement à l'aide de la formule de Grassmann, qui figure au programme :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Le sujet présentant plusieurs questions de cours à re-démontrer, on a ici choisi de prouver directement l'inégalité demandée. On peut par ailleurs remarquer qu'avec les notations précédentes, $F + G = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$, mais cette égalité est superflue pour démontrer le résultat de la question.

7 Soit S un endomorphisme de X de la forme $P_1 + \dots + P_m$ où tous les P_i sont des projecteurs. Par linéarité de la trace, $\operatorname{tr} S = \operatorname{tr} P_1 + \dots + \operatorname{tr} P_m$. Or, comme les P_i sont des projecteurs, leur trace est égale à leur rang (question 4), qui est un entier naturel. Par somme,

$$\operatorname{tr} S \in \mathbb{N}$$

Pour le second point à montrer, commençons par montrer que si U et V sont deux endomorphismes de X , alors

$$\operatorname{rg}(U + V) \leq \operatorname{rg} U + \operatorname{rg} V \quad (*)$$

Pour cela, remarquons que $R(U + V) \subset R(U) + R(V)$. En effet, si $x \in R(U + V)$, il existe $\xi \in X$ tel que $x = (U + V)(\xi)$, de sorte que $x = U(\xi) + V(\xi)$ est bien un élément de $R(U) + R(V)$. Par croissance de la dimension, cette inclusion fournit

$$\dim R(U + V) \leq \dim(R(U) + R(V))$$

Or, d'après la question 6, $\dim(R(U) + R(V)) \leq \dim R(U) + \dim R(V)$. Il vient donc

$$\dim R(U + V) \leq \dim R(U) + \dim R(V)$$

ce qui correspond à l'inégalité (*).

Maintenant, pour le second point de l'énoncé à montrer, procédons par récurrence sur m . Pour $m \geq 1$, considérons la propriété suivante :

$\mathcal{P}(m)$: « Si S est la somme de m projecteurs $P_1, \dots, P_m$, alors $\operatorname{tr} S \geq \operatorname{rg} S$. »

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car dans ce cas, $S = P_1$ est un projecteur et on a même l'égalité $\operatorname{tr} S = \operatorname{rg} S$.

- $\mathcal{P}(m-1) \implies \mathcal{P}(m)$ Soit $m > 1$ et supposons la propriété $\mathcal{P}(m-1)$ vraie. Soit S une somme de m projecteurs $P_1, \dots, P_m$. Notons $S' = P_1 + \dots + P_{m-1}$, de sorte que $S = S' + P_m$. D'après l'inégalité (*), on a $\text{rg } S \leq \text{rg } S' + \text{rg } P_m$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $\text{rg } S' \leq \text{tr } S'$, et comme P_m est un projecteur, on a $\text{rg } P_m = \text{tr } P_m$. Par conséquent, $\text{rg } S \leq \text{tr } S' + \text{tr } P_m$. Enfin, comme $S' = P_1 + \dots + P_{m-1}$, on obtient par linéarité de la trace

$$\text{tr } S' = \text{tr } P_1 + \dots + \text{tr } P_{m-1}$$

d'où $\text{rg } S \leq \text{tr } P_1 + \dots + \text{tr } P_{m-1} + \text{tr } P_m = \text{tr } (P_1 + \dots + P_m) = \text{tr } S$. Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(m)$ est vraie.

- Conclusion: d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \geq 1$.

Si un endomorphisme S est une somme finie de projecteurs, alors $\text{tr } S \in \mathbb{N}$ et $\text{tr } S \geq \text{rg } S$.

2. PROJECTEURS DE RANG 1

8 Comme dans la question 4, on choisit une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$. Puisque $\text{rg } P = 1$, la matrice de P dans cette base est

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Si on note t_{ij} le terme général de la matrice $T_{\mathcal{B}}$, alors comme la matrice d'une composée d'endomorphismes est le produit des matrices de chacun de ces endomorphismes, la matrice de l'endomorphisme PTP dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ P_{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $P_{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}} = t_{11} P_{\mathcal{B}}$ et puisque $S \mapsto S_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de l'espace $\mathcal{L}(X)$ des endomorphismes de X sur $\mathcal{M}_n$, il vient $PTP = t_{11}P$. Finalement,

Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.

Ce résultat est un cas particulier de celui qui suit. Notons $\mathbb{J}_r$ la matrice de $\mathcal{M}_n$ définie (par blocs) par

$$\mathbb{J}_r = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right]$$

et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n$ défini par $\Phi(T) = \mathbb{J}_r T \mathbb{J}_r$. En effectuant un calcul par blocs tout à fait analogue à celui fait dans la question 8, on montre que l'image de Φ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right]$$

avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_r$. En particulier, Φ est de rang r^2 . Dans le cas particulier $r = 1$, l'image de Φ est donc une droite vectorielle. Elle contient $\mathbb{J}_1$ car $\Phi(\mathbb{J}_1) = \mathbb{J}_1^3 = \mathbb{J}_1$, donc toute matrice de la forme $\mathbb{J}_1 T \mathbb{J}_1$ est proportionnelle à $\mathbb{J}_1$.

Proposons une solution sans utilisation de matrices. Posons $R(P) = \text{Vect}(u)$ avec $u \in X \setminus \{0\}$. Puisque $P^2 = P$, on a $P|_{R(P)} = \text{Id}_{R(P)}$ de sorte que $P(u) = u$.

Ainsi,

$$(\text{PTP})(u) = P(T(u)) \in R(P)$$

de sorte qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\text{PTP}(u) = \mu u = \mu P(u)$. Montrons alors que $\text{PTP} = \mu P$. Pour cela, puisque $X = R(P) \oplus N(P)$, il suffit de prouver que cette égalité est vraie sur $R(P)$ d'une part et sur $N(P)$ d'autre part. Or, PTP et μP coïncident sur la droite $R(P)$ vu ce qui précède, et sont identiquement nuls sur $N(P)$.

9 Il suffit de montrer que dans sa décomposition sur la base $\mathcal{C}$, le vecteur $T(f_1)$ a pour coordonnée μ suivant f_1 . Puisque $X = R(P) \oplus N(P) = \text{Vect}(f_1) \oplus N(P)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in N(P)$ tels que $T(f_1) = \alpha f_1 + x$. Comme $f_1 \in R(P)$, il existe e_1 dans X tel que $f_1 = P(e_1)$. Ainsi, puisque $\text{PTP} = \mu P$, il vient

$$P(T(f_1)) = P(T(P(e_1))) = (\text{PTP})(e_1) = \mu P(e_1) = \mu f_1$$

Par ailleurs, l'égalité $T(f_1) = \alpha f_1 + x$ donne

$$P(T(f_1)) = P(\alpha f_1 + x) = \alpha P(f_1) + 0 = \alpha P^2(e_1) = \alpha P(e_1) = \alpha f_1$$

Par conséquent, $\alpha = \mu$ (car $f_1 \neq 0$), c'est-à-dire que μ est la coordonnée de $T(f_1)$ selon f_1 .

La matrice de T dans la base $\mathcal{C}$ s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \mathbb{B} \end{array} \right]$$

où μ est le réel trouvé à la question 8 et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.

10 Montrons l'implication proposée par contraposée: il s'agit de prouver que si la matrice $\mathbb{B}$ est la matrice d'une homothétie, alors $P'TP'$ est proportionnel à P' . Supposons donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{B} = \lambda \mathbb{I}_{n-1}$. Comme $P' = I - P$, la matrice de P' dans la base $\mathcal{C}$ est, d'après la question 4,

$$\mathbb{P}'_{\mathcal{C}} = \mathbb{I}_n - \mathbb{P}_{\mathcal{C}} = \mathbb{I}_n - \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{B} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right]$$

Calculons à présent la matrice de $U = P'TP'$ par rapport à la base $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{\mathcal{C}} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} \mu & \times & \times \\ \hline \times & & \\ \times & & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} 0 & \times & \times \\ \hline 0 & & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Cela montre que $\mathbb{P}'_{\mathcal{C}} \mathbb{T}_{\mathcal{C}} \mathbb{P}'_{\mathcal{C}} = \lambda \mathbb{P}'_{\mathcal{C}}$ et par suite que $P'TP' = \lambda P'$ (rappelons que l'application $S \mapsto \mathbb{S}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(X)$ sur $\mathcal{M}_n$). Finalement,

Si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P' , alors la matrice $\mathbb{B}$ n'est pas celle d'une homothétie.

3. ENDOMORPHISMES DIFFÉRENTS D'UNE HOMOTHÉTIE

11 Montrons ce résultat classique par l'absurde : on suppose que pour tout $x \in X$, la famille (x, Tx) est liée. On va montrer que cela implique que T est une homothétie. Commençons par démontrer que cette hypothèse donne

$$\forall x \in X \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \quad Tx = \lambda_x x \quad (\mathbf{A})$$

En effet, on sait d'après le cours que (x, Tx) est liée si et seulement si x et Tx sont colinéaires. Si $x \neq 0$, il existe donc λ_x tel que $Tx = \lambda_x x$. Si $x = 0$, alors on a aussi $Tx = 0$ et n'importe quel réel convient pour λ_0 . Cela montre l'assertion **(A)**.

Revenons à la question de l'énoncé et montrons que T est une homothétie, c'est-à-dire que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad Tx = \lambda x \quad (\mathbf{B})$$

D'après ce qui précède, si x et y sont deux vecteurs quelconques de X , il existe deux réels λ_x et λ_y tels que $Tx = \lambda_x x$ et $Ty = \lambda_y y$. Si l'on montre que $\lambda_x = \lambda_y$, on aura montré que tous les coefficients de proportionnalité entre Tx et x sont égaux pour tout $x \in X$, c'est-à-dire que T est une homothétie.

Supposons d'abord que x et y sont non nuls. Distinguons deux cas.

- Supposons que (x, y) est une famille libre, considérons $x + y$. Vu l'assertion **(A)**, il existe un réel λ_{x+y} tel que $T(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$. Avec cette égalité on obtient en développant et par linéarité de T :

$$Tx + Ty = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$$

$$\text{d'où} \quad \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$$

$$\text{ou encore} \quad (\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$$

Puisque x et y sont indépendants, la dernière égalité implique $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$, d'où $\lambda_x = \lambda_y$.

- Si (x, y) est liée, alors puisque x et y sont non nuls, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \mu x$. Ainsi, on a $Ty = \mu Tx$, ce qui donne

$$\lambda_y y = \mu \lambda_x x = \lambda_x(\mu x) = \lambda_x y$$

et donc, comme $y \neq 0$, il vient $\lambda_y = \lambda_x$.

Finalement, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \setminus \{0\} \quad Tx = \lambda x$

En outre, pour un tel λ , on a également $T(0) = \lambda \cdot 0$, ce qui achève de prouver **(B)**. Ainsi, T est une homothétie, ce qui est absurde.

Il existe $x \in X$ tel que x et Tx ne soient pas liés.

12 D'après la question 11, il existe $x \in X$ tel que la famille (x, Tx) soit libre. Choisissons-en un, noté e_1 , et posons $e_2 = Te_1$. La famille (e_1, e_2) étant libre, on peut

la compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de X d'après le théorème de la base incomplète. Pour montrer que la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme annoncée dans l'énoncé, cherchons les coordonnées de $T(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Par construction de (e_1, e_2) ,

$$T(e_1) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \sum_{i=3}^n 0 \cdot e_i$$

Vue cette décomposition de $T(e_1)$ selon la base $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est bien de la forme cherchée.

Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de T est de la forme	
$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} =$	$\left[\begin{array}{c cccc} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$
avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}$.	

13 Procédons par récurrence sur n . Pour $n \geq 2$, considérons la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « Si X est un espace vectoriel de dimension n et si $T \in \mathcal{L}(X)$ est un endomorphisme de trace nulle et différent d'une homothétie, il existe une base $\mathcal{B}'$ de X telle que la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle. »

- $\mathcal{P}(2)$ Si X est de dimension 2, il existe d'après la question 12 une base $\mathcal{B}'$ telle que

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \times \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

Le coefficient a est ainsi égal à $\text{tr } \mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \text{tr } T$ d'après la question 2. Or, cette trace est nulle par hypothèse, de sorte que $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ a bien sa diagonale nulle.

- $\mathcal{P}(n-1) \implies \mathcal{P}(n)$ Soit $n > 2$ et supposons la propriété $\mathcal{P}(n-1)$ vraie. Soient X de dimension n et $T \in \mathcal{L}(X)$ de trace nulle et qui n'est pas une homothétie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de X telle que $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ ait la forme donnée à la question 12, à savoir

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

Notons T' l'endomorphisme de $Y = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ dont la matrice dans la base $(e_2, \dots, e_n)$ est $\mathbb{A}$. On a donc $\text{tr } T' = \text{tr } \mathbb{A}$. Or

$$\text{tr } T = \text{tr } \mathbb{T} = 0 = 0 + \text{tr } \mathbb{A}$$

de sorte que $\text{tr } T' = 0$.

Supposons d'abord que T' est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T' = \lambda I$. Dans ce cas, $\text{tr } T' = (n-1)\lambda$ et puisque cette trace est nulle, il vient $\lambda = 0$ et donc $T' = 0$. Par suite, la matrice $\mathbb{A}$ est nulle et les éléments diagonaux de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ sont par conséquent nuls. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est ainsi vraie.

Sinon, T' n'est pas une homothétie, de sorte que l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à T' : il existe une base $(e'_2, \dots, e'_n)$ de $Y = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ telle que $\mathbb{T}'_{(e'_2, \dots, e'_n)}$ ait sa diagonale nulle. Soit enfin $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$. C'est une base de X car elle est adaptée à la décomposition $X = \text{Vect}(e_1) \oplus Y$, et la matrice de T dans cette base est de la forme

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \mathbb{T}'_{(e'_2, \dots, e'_n)} \\ \\ \end{array}$$

Comme $\mathbb{T}'_{(e'_2, \dots, e'_n)}$ a sa diagonale nulle, il en découle que $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ a également sa diagonale nulle. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est prouvée.

- **Conclusion :** par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Lorsque $\text{tr } T = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

On peut aussi procéder de façon entièrement matricielle et montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle. La preuve est tout à fait analogue à celle qui vient d'être écrite. Dans la récurrence, on trouvera une matrice de passage par blocs de la forme

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S} & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

où $\mathbb{S} \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ est donnée par $\mathcal{P}(n-1)$.

14 L'idée est de pouvoir appliquer la question précédente à un certain endomorphisme de trace nulle construit à partir de T . Comme T n'est pas une homothétie, commençons comme à la question 12 en choisissant un vecteur e_1 qui forme avec $e_2 = T(e_1)$ une base $\mathcal{B}$ de X . Dans cette base, l'endomorphisme T a pour matrice

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & t_1 + t_2 \end{bmatrix}$$

Construisons à partir de T un endomorphisme T' de trace nulle. Pour cela, considérons $U \in \mathcal{L}(X)$ défini par

$$\mathbb{U}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$

Dans la base $\mathcal{B}$, l'endomorphisme $T' = T - U$ a pour matrice

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{B}} = \mathbb{T}_{\mathcal{B}} - \mathbb{U}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -t_1 & a \\ 1 & t_1 \end{bmatrix}$$

Ce n'est pas une matrice scalaire, donc T' n'est pas une homothétie. Par ailleurs, $\text{tr } T' = \text{tr } \mathbb{T}'_{\mathcal{B}} = 0$ et le résultat de la question 13 assure par conséquent l'existence d'une base $\mathcal{B}'' = (e''_1, e''_2)$ de X telle que la matrice de T' dans cette base ait sa diagonale nulle.

À ce stade, on ne peut pas conclure en utilisant la relation $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \mathbb{T}'_{\mathcal{B}''} + \mathbb{U}_{\mathcal{B}''}$ car on ne sait pas si t_1 et t_2 sont les éléments diagonaux de $\mathbb{U}_{\mathcal{B}''}$. Pour s'assurer que l'on est dans cette situation, on va construire plus explicitement $\mathcal{B}''$ afin de pouvoir trouver les coefficients de $\mathbb{U}_{\mathcal{B}''}$.

D'après la démonstration de la question 13, une telle base $\mathcal{B}''$ peut être obtenue en choisissant e_1'' tel que la famille $(e_1'', T'(e_1''))$ soit libre, puis en posant $e_2'' = T'(e_1'')$. Or le choix $e_1'' = e_1$ convient. En effet, comme e_1 et e_2 forment une famille libre, le vecteur $T'(e_1) = e_2 - t_1 e_1$ n'est pas proportionnel à e_1 . Ainsi, la base $\mathcal{B}''$ est formée des vecteurs

$$e_1'' = e_1 \quad \text{et} \quad e_2'' = e_2 - t_1 e_1$$

Cherchons maintenant la forme de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$. Par construction, la matrice de T' dans la base $\mathcal{B}''$ est de la forme

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, construisons $\mathbb{U}_{\mathcal{B}''}$. D'une part $U(e_1'') = U(e_1) = t_1 e_1$ et d'autre part

$$\begin{aligned} U(e_2'') &= U(e_2 - t_1 e_1) \\ &= U(e_2) - t_1 U(e_1) \\ &= t_2 e_2 - t_1^2 e_1 \\ &= t_2(e_2 - t_1 e_1) + (t_1 t_2 - t_1^2) e_1 \\ U(e_2'') &= (t_1 t_2 - t_1^2) e_1'' + t_2 e_2'' \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathbb{U}_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 t_2 - t_1^2 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$

Finalement,

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \mathbb{U}_{\mathcal{B}''} + \mathbb{T}'_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} t_1 & \alpha + t_1 t_2 - t_1^2 \\ 1 & t_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

Lorsque $n = 2$, il existe une base $\mathcal{B}''$ de X telle que $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux t_1 et t_2 .

15 Vu le résultat admis dans l'énoncé (appliqué avec $t = t_1$), il existe un projecteur L de X de rang 1 tel que $LTL = t_1 L$ et tel que $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$. D'après la question 9, il existe une base $\mathcal{C}$ de X telle que la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ soit de la forme

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \mathbb{B} \end{array} \right]$$

Comme $L'TL'$ n'est pas proportionnel à L' , la question 10 assure que la matrice $\mathbb{B}$ (de taille $(n-1) \times (n-1)$) n'est pas la matrice d'une homothétie.

Il existe une base $\mathcal{C}$ de X dans laquelle la matrice de T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \mathbb{B} \end{array} \right]$$

où $\mathbb{B} \in M_{n-1}$ n'est pas la matrice d'une homothétie.

L'hypothèse $n \geq 3$ n'apparaît pas dans cette preuve. Elle est pourtant importante pour que le résultat donné par l'énoncé soit vrai. Deux façons de le voir sont possibles. D'une part, si $n = 2$, le projecteur L' est de rang 1 (vues la question 5 et la formule du rang) et le résultat de la question 8 implique que $L'TL'$ est proportionnel à L' . D'autre part, avec $n = 2$, la matrice $\mathbb{B}$ serait de taille 1 et serait donc une homothétie, ce qui fait que $L'TL'$ serait proportionnel à L' d'après la question 10.

16 Comme suggéré par l'énoncé, on va procéder par récurrence sur n , mais en initialisant à $n = 2$. Ce cas $n = 2$ est en effet déjà traité à la question 14. Considérons, pour $n \geq 2$, la propriété

$\mathcal{P}(n)$: « Soient X est un espace de dimension n , T un endomorphisme de X qui n'est pas une homothétie et $t_1, \dots, t_n$ des réels tels que $t_1 + \dots + t_n = \text{tr } T$. Alors il existe une base $\mathcal{B}''$ de X telle que la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux $t_1, \dots, t_n$. »

- $\mathcal{P}(2)$ est vraie d'après la question 14.
- $\mathcal{P}(n-1) \implies \mathcal{P}(n)$ Soit $n \geq 3$ et supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie. Soit X un espace de dimension n . On considère un endomorphisme T et des réels $t_1, \dots, t_n$ comme dans l'énoncé. D'après la question 15, il existe une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ dans laquelle la matrice de T est de la forme

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \mathbb{B} \end{array} \right]$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas la matrice d'une homothétie d'après la question 10. Considérons l'endomorphisme U de $Y = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$ dont la matrice dans la base $(f_2, \dots, f_n)$ est $\mathbb{B}$. Cet endomorphisme n'est pas une homothétie et sa trace est $\text{tr } U = t_2 + \dots + t_n$ puisque $\text{tr } T = t_1 + \text{tr } U$ et $\text{tr } T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ par hypothèse. On peut donc appliquer $\mathcal{P}(n-1)$ à U .

Il existe ainsi une base $(f'_2, \dots, f'_n)$ de Y dans laquelle la matrice de U a pour éléments diagonaux $t_2, \dots, t_n$. La famille $\mathcal{B}'' = (f_1, f'_2, \dots, f'_n)$ est une base de X adaptée à la décomposition $X = \text{Vect}(e_1) \oplus Y$ et la matrice de T par rapport à cette base s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \times & & \\ \times & & \mathbb{U}_{(f'_2, \dots, f'_n)} \end{array} \right]$$

Par construction, cette matrice a pour éléments diagonaux les réels $t_1, t_2, \dots, t_n$, ce qui montre $\mathcal{P}(n)$.

- **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Il existe une base $\mathcal{B}''$ de X telle que $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux $t_1, \dots, t_n$.

On peut faire commencer la récurrence à $n = 3$. Dans ce cas, une preuve de $\mathcal{P}(3)$ consiste à suivre de façon strictement analogue ce qui est fait dans l'étape d'hérédité décrite ci-dessus.

4. DÉCOMPOSITION EN SOMME DE PROJECTEURS

17 D'après la formule du rang, le noyau $N(T)$ est de dimension $n - \rho$. Considérons-en une base $(e_{\rho+1}, \dots, e_n)$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$ de X grâce au théorème de la base incomplète. Par construction, on a $T(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket \rho + 1 ; n \rrbracket$. Ainsi,

Il existe une base $\mathcal{B}$ de X dans laquelle la matrice $T_{\mathcal{B}}$ est de la forme

$$T_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & \mathbb{O} \\ \hline T_2 & \mathbb{O} \end{array} \right]$$

où le bloc noté T_1 est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

18 Considérons comme à la question 17 une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$ adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$. Avec les notations de la question 17, soit T_1 l'endomorphisme de $R(P)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_\rho)$ est T_1 . En vue d'appliquer les résultats des questions 14 et 16 à T_1 , vérifions que $\rho \geq 2$.

Pour cela, remarquons d'abord que le cas $\rho = 0$ est exclu par l'énoncé car T est supposé être non nul. Par ailleurs, on ne peut pas non plus avoir $\rho = 1$ sinon T_1 serait la matrice (de taille 1×1) d'une homothétie, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, $\rho \geq 2$.

Comme $\text{tr } T$ est un entier supérieur ou égal à $\rho = \text{rg } T$, donc à 2, il existe des entiers strictement positifs $t_1, \dots, t_\rho$ tels que $\text{tr } T = t_1 + \dots + t_\rho$. On peut en effet par exemple poser $t_1 = \dots = t_{\rho-1} = 1$ et $t_\rho = \text{tr } T - \rho + 1$, ce dernier étant bien non nul puisque $\text{tr } S \geq \rho$. En conséquence, d'après les questions 14 et 16, il existe une base $(e'_1, \dots, e'_\rho)$ de $R(P)$ dans laquelle les éléments diagonaux de la matrice T'_1 de T_1 sont $t_1, \dots, t_\rho$.

Considérons à présent la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$. C'est une base de X car elle est adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$, et par construction, la matrice de T dans cette base est de la forme

$$T_{\mathcal{B}'} = \left[\begin{array}{c|c} T'_1 & \mathbb{O} \\ \hline T'_2 & \mathbb{O} \end{array} \right]$$

Enfin, les éléments diagonaux de T'_1 sont $t_1, \dots, t_\rho$, ce qui permet de conclure.

Il existe une base $\mathcal{B}'$ de X dans laquelle la matrice de T est de la forme

$$T_{\mathcal{B}'} = \left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \times & \cdots & \\ \times & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \mathbb{O} \\ \times & \cdots & \cdots & \end{array} \right]$$

où $t_1, \dots, t_\rho$ et ρ sont des entiers non nuls.

Notons que les entiers $t_1, \dots, t_n$ peuvent être choisis négatifs. Leur positivité est utile pour répondre à la question suivante.

19 Travaillons dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ obtenue comme dans la question précédente, avec des entiers $t_1, \dots, t_n$ strictement positifs. On écrit $T_{\mathcal{B}'}$ comme une

somme des ρ matrices obtenues en ne gardant à chaque fois qu'une de ses colonnes et en mettant des 0 ailleurs :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \times & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

Pour chacune des matrices ainsi obtenues, mettons le coefficient $t_i \neq 0$ en facteur (les coefficients inconnus symbolisés par $\times$ sont donc changés par cette opération) :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \times & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

Notons $\mathbb{P}_i$ les ρ matrices ainsi obtenues, de sorte que $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = t_1 \mathbb{P}_1 + t_2 \mathbb{P}_2 + \cdots + t_\rho \mathbb{P}_\rho$. Pour tout $i \in \llbracket 1; \rho \rrbracket$, soit P_i l'endomorphisme de X dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est $\mathbb{P}_i$. Montrons que P_i est un projecteur.

L'entier i étant fixé, notons $p_{1i}, \dots, p_{ni}$ les coefficients de la colonne non nulle de $\mathbb{P}_i$, de sorte que $p_{ii} = 1$. Soit x appartenant à X un vecteur que l'on décompose sur la base $\mathcal{B}'$ en

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e'_k \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Puisque l'image par P_i du vecteur e'_k est nulle dès que $k \neq i$,

$$P_i(x) = \sum_{k=1}^n x_k P_i(e'_k) = x_i P_i(e'_i) = x_i \sum_{k=1}^n p_{ki} e'_k$$

$$\begin{aligned} \text{En appliquant } P_i, \text{ il vient} \quad P_i^2(x) &= x_i \sum_{k=1}^n p_{ki} P_i(e'_k) \\ &= x_i p_{ii} P_i(e'_i) \\ &= x_i P_i(e'_i) && \text{car } p_{ii} = 1 \\ P_i^2(x) &= P_i(x) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout $x \in X$, cela signifie que $P_i^2 = P_i$, c'est-à-dire que P_i est un projecteur.

Écrivons enfin

$$T = t_1 P_1 + \cdots + t_\rho P_\rho = P_1 + \cdots + P_1 + \cdots + P_\rho + \cdots + P_\rho$$

où, dans le membre de droite, on somme t_1 fois P_1 , t_2 fois P_2 , etc. C'est bien une somme finie de projecteurs.

Lorsque $\mathbb{T}_1$ n'est pas la matrice d'une homothétie, on peut écrire T comme une somme finie de projecteurs.

Comme évoqué à la fin de la question précédente, le fait que les t_i sont positifs est important. En effet, supposons par exemple que t_1 soit négatif. En suivant la méthode décrite ici, si l'on veut une *somme* de projecteurs (et pas des sommes et des *différences*), on mettra $-t_1$ en facteur dans la matrice correspondant à la première colonne de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$. Le premier coefficient de la matrice ainsi obtenue est égal à -1 , mais cette matrice n'est par conséquent

pas idempotente (c'est-à-dire que son carré n'est pas égal à elle-même), et ne peut donc pas représenter un projecteur. Remarquons enfin que la méthode échoue également si les t_i ne sont pas des entiers.

20 Dans le cas où la matrice T_1 est une homothétie, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $T_1 = \lambda I_\rho$. Remarquons dans ce cas que $\text{tr } T = \text{tr } (\lambda I_\rho) = \rho\lambda$. L'hypothèse $\text{tr } T \geq \text{rg } T$ donne alors $\rho\lambda \geq \rho$, soit $\lambda \geq 1$. En outre, il y a égalité $\text{tr } T = \text{rg } T$ si et seulement si $\lambda = 1$.

Supposons d'abord que $\lambda = 1$. Soit $\mathcal{B}'$ est une base donnée par le résultat de la question 18. Alors

$$T_{\mathcal{B}'}^2 = \left[\begin{array}{c|c} I_\rho & \mathbb{O} \\ \hline T_2 & \mathbb{O} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_\rho & \mathbb{O} \\ \hline T_2 & \mathbb{O} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_\rho^2 & \mathbb{O} \\ \hline T_2 I_\rho & \mathbb{O} \end{array} \right] = T_{\mathcal{B}'}$$

ce qui montre que T est un projecteur. C'est en particulier une somme finie de projecteurs (réduite à un terme).

Supposons dorénavant que $\lambda \neq 1$, ce qui revient à supposer que $\text{tr } T > \rho$, ou encore, puisque $\text{tr } T$ et ρ sont des entiers, à supposer que $\text{tr } T - 1 \geq \rho$. Toujours avec les notations précédentes, soit P_0 l'endomorphisme de X dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est $\text{Diag}(1, 0, \dots, 0)$. Regardons l'endomorphisme $\tilde{T} = T - P_0$. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\tilde{T}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'} - P_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \\ \hline & & T_2 & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathbb{O} \\ \\ \\ \mathbb{O} \end{array}$$

Le bloc de taille $\rho \times \rho$ n'est pas une homothétie. En outre, l'endomorphisme $\tilde{T}$ a pour trace $\text{tr } \tilde{T} = \text{tr } T - 1$ et pour rang $\text{rg } \tilde{T} = \rho$ car $\lambda \notin \{0, 1\}$ et donc le bloc supérieur gauche est une matrice extraite inversible de taille maximale. Par conséquent, cet endomorphisme vérifie les hypothèses d'application de la question 19 donc est une somme finie de projecteurs $P_1 + \dots + P_\rho$ et donc $T = P_0 + P_1 + \dots + P_\rho$ l'est également. En conclusion,

Lorsque T_1 est une homothétie, T est une somme finie de projecteurs.

Les questions 19 et 20 permettent de conclure que tout endomorphisme non nul d'un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ dont la trace est entière et supérieure ou égale à son rang s'écrit comme la somme de projecteurs de rang 1. Remarquons que l'endomorphisme nul est un projecteur (de rang nul) sur $\{0\}$ parallèlement à X , et que si $n = 1$, un endomorphisme est un projecteur si et seulement s'il est nul ou égal à l'identité.