Continuité, dérivabilité

1 — $(*)$

Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{x}}\right) + \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{x}}\right)$$

2 — $(**)$

A quelle condition portant sur le réel k l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $2 \arcsin x = \arcsin kx$ a-t-elle des solutions non nulles ? Quelles sont alors ces solutions ?

3 — $(**)$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par

$$P_0 = 1, P_1 = a_1 + X \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 1, \quad P_{n+1} = (a_{n+1} + X)P_n - b_n P_{n-1}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n a n racines distinctes, séparées par celles de P_{n-1}.

4 — $(**)$

Soient f et g deux applications continues sur $I = [a; b]$. Soit φ la fonction définie par

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup\limits_{t\in I} \ (f(t) + xg(t)) \end{array}$$

Montrer que φ est lipschitzienne.

5 — $(**)$ — **X PC 2014**

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. On suppose que $f \circ g = I_d$. Montrer que f et g sont bijectives.

6 — $(***)$ — **X PC 2014**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note

$$A = \left\{\alpha \in \mathbb{R},\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\right\}$$

Montrer que pour tous $a < b \in A$, $[a; b] \subset A$.

7 — $(*)$

Soit $f : t \longmapsto 1/(1 + t^2)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|f^{(n)}\right|$ est majorée par $n!$ et calculer $f^{(n)}(1)$.

8 — $(**)$

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, périodique, non constante et $a > 0$. Montrer qu'il existe un réel x tel que la tangente en $(x, f(x))$ à la courbe représentative de f recoupe celui-ci en $(x + a, f(x + a))$.

9 — $(***)$ — **X PC 2014**

Soit $k \in \,]0; 1[$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 0 telle que

$$\frac{f(x) - f(kx)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$$

Montrer que f est dérivable en 0 en calculer $f'(0)$.

10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln f$ est convexe si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

11

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

(a). Montrer que $x \longmapsto f(x) - x\,f'(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

(b). Si cette limite p est finie, montrer que $f(x)/x$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m en $+\infty$.

(c). Montrer que $g : x \longmapsto f(x) - mx - p$ tend vers 0 en $+\infty$.

Intégrale sur un segment

12 ———— $(*)$ ————

Calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{(2-x)/x}$.

13 ———— $(**)$ ————

Etudier la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

14 ———— $(*)$ ————

(a). Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose que

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad f(a+b-x) = f(x)$$

Exprimer $\displaystyle\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(b). En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$.

15 ———— $(**)$ ————

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1]\,,\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

(a). Montrer que $2\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

(b). On suppose de plus que $f(1) = 0$. Améliorer l'inégalité du (a).

16 ———— $(*)$ ————

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_e^x \ln(\ln t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(\ln x)$.

17 ———— $(**)$ ————

Etudier la limite λ lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ puis donner un équivalent de $u_n - \lambda$.

18 ———— $(**)$ ————

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = \alpha f(x) \tag{$\star$}$$

On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par f et discuter suivant les valeurs de α.

Formules de Taylor et applications

19 ———— $(**)$ ————

Déterminer le DL à l'ordre 2 en $\pi/3$ de $x \longmapsto \arctan(2\sin x)$.

20 ———— $(*)$ ————

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (\cos x)^{1/(\mathrm{sh}x \sin x)}$.

21 ———— $(**)$ ————

Soit f définie par

$$f : \begin{array}{rcl}]-\pi/2;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x - x \end{array}$$

(a). Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera les propriétés.

(b). Déterminer des constantes a et b telles qu'au voisinage de $+\infty$, on ait $g(y) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{y^2} + o\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$.

22 (∗∗)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que f et f'' soient bornées. Notons M_0 (resp. M_2) un majorant de $|f|$ (resp. $|f''|$). Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

23 (∗∗)

(a). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^5$ et impaire. On suppose que $f'(0) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ majorant $\left|f^{(5)}\right|$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f(x) - \frac{x}{3} f'(x)\right| \leq \frac{M}{180} |x|^5$$

(b). Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^5$. On note M un majorant de $\left|g^{(5)}\right|$ et on suppose que g' s'annule en a, b et $(a + b)/2$. Justifier que

$$|g(b) - g(a)| \leq \frac{M}{2880} (b - a)^5$$

24 (∗∗)

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On note pour tout $\beta > 0$

$$\Delta(\beta) = \left(\int_0^1 f(t)^\beta \, \mathrm{d}t\right)^{1/\beta}$$

et on cherche la limite de $\Delta(\beta)$ lorsque β tend vers 0^+.

(a). Justifier que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^\beta \, \mathrm{d}t \xrightarrow[\beta \to 0]{} 1$.

(b). Démontrer qu'il suffit de déterminer la limite $\displaystyle\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}\left(\int_0^1 f(t)^\beta \, \mathrm{d}t - 1\right)$.

(c). On travaille avec $\beta \in [0; 1]$. Justifier l'existence d'un réel K indépendant de x et de β tel que

$$\forall x \in [0; 1], \qquad \left|e^{\beta \ln(f(x))} - 1 - \beta \ln f(x)\right| \leq K\beta^2 \left[\ln(f(x))\right]^2$$

(d). Conclure.

1 On pourra calculer $f'(x)$.

2 Raisonner par condition nécessaire en composant par sin et faisant particulièrement attention à la simplification de $\sin\circ\arcsin$ et $\cos\circ\arcsin$.

3 Raisonner par récurrence sur n et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

4 Considérer deux réels $x \leq y \in \mathbb{R}$ et $t \in [a;b]$ puis majorer la quantité $(f(t)+xg(t))$ par une quantité ne dépendant plus de t mais seulement de x, y et $\varphi(y)$.

5 Justifier que g est injective, puis strictement monotone. Montrer ensuite par l'absurde en utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}$ que les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$ sont nécessairement infinies.

6 On pourra commencer par montrer le résultat suivant :

$$\forall c \in [a;b]\,, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall M \in \mathbb{R}_+, \quad \exists x > M, \qquad f(x) \in \,]c-\epsilon; c+\epsilon[$$

7 Décomposer en éléments simples f sur $\mathbb{C}$.

8 Travailler avec l'application $g : x \longmapsto f(x+a) - f(x) - af'(x)$. Justifier que f est borné sur $\mathbb{R}$ et atteint son minimum en deux points distincts.

9 Noter $g : x \longmapsto (f(x) - f(kx))/x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Utiliser une relation donnant le taux d'accroissement de f entre 0 et x et les valeurs $g(x), g(kx), \ldots, g(k^n x)$ puis utiliser la limite de g en 0.

13 En $+\infty$, encadrer $f(x)$. En 0, intégrer terme à terme un développement généralisé de $1/\ln(1+t)$. Enfin en $-1/2$, étudier la limite de f'.

14 (a) Faire un changement de variable.

(b) Poser $x = \tan(\theta/2)$.

15 (a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. Majorer ensuite grossièrement.

(b) Travailler sur $[0;1/2]$ et sur $[1/2;1]$.

16 Utiliser une intégration par parties.

17 Penser aux sommes de Riemann. Pour obtenir l'équivalent, on pourra introduire la primitive F de $t \longmapsto 1/(1+t^2)$ et utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3.

18 Inutile de faire intervenir ici les intégrales à paramètres. Faire un changement de variable puis déterminer l'équation différentielle. Ne pas oublier la réciproque et en particulier le problème du raccord en 0.

19 Utiliser le développement limité de la derivée.

20 Passer à la forme $\exp\circ\ln$.

21 (b) On pourra déterminer successivement a et b.

22 Fixer x, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[x; x+h]$ et $[x-h; x]$ puis choisir un h judicieux.

23 (a) Considérer $\varphi(x) = f(x) - xf'(x)/3$ et majorer $\left|\varphi^{(3)}\right|$ en fonction de M et x.

(b) Considérer f définie par $f(x) = g\left(\dfrac{a+b}{2} + x\right) - g\left(\dfrac{a+b}{2} - x\right)$.

24 (a) Justifier que f est minorée par un réel strictement positif, puis utiliser un encadrement grossier.

(b) Utiliser l'écriture $\exp\circ\ln$ et le développement limité de ln en 1.

(c) Utiliser l'inégalité des accroissements finis.