1 —— $(*)$ ——

Pour tout réel $x \in [-1;1]$, on note φ_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice respectivement à la base canonique est

$$A_x = \begin{pmatrix} x^2 & x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & 1-x^2 & -x \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \end{pmatrix}$$

(a). Calculer la trace et le déterminant de la matrice A_x.

(b). Montrer pour tout $x \in [-1;1]$, 1 est une valeur propre de A_x.

(c). Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_x.

(d). Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme φ_x.

(a) La trace de A_x se calcule immédiatement et vaut 1, quelle que soit la valeur de x. Pour le déterminant, on peut par exemple développer par rapport à la dernière ligne et il vient

$$\begin{aligned} \det A_x &= \sqrt{1-x^2}\begin{vmatrix} x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ 1-x^2 & -x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x^2 & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & -x \end{vmatrix} \\ &= (1-x^2)\left(-x^2-(1-x^2)\right) + x\left(-x^3 - x(1-x^2)\right) \\ \det A_x &= (x^2-1) - x^2 = -1 \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\text{La matrice } A_x \text{ est de trace 1 et de déterminant } -1.}$

(b) Pour tout réel x,
$$A_x - I_3 = \begin{pmatrix} x^2-1 & x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & -x^2 & -x \\ \sqrt{1-x^2} & -x & -1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que cette matrice est de rang 1 puisque ses deux premiers vecteurs colonnes sont colinéaires au dernier. Ainsi, $A_x - I_3$ n'est pas inversible et donc

$$\boxed{\text{Le réel 1 est valeur propre de } A_x.}$$

(c) On sait d'après la question précédente que 1 est valeur propre de multiplicité au moins 2 de A_x. Si l'on note λ la dernière valeur propre (éventuellement complexe), il vient $\det A_x = 1^2 \cdot \lambda$ d'où $\lambda = -1$. Ainsi, A_x admet 1 comme valeur propre de multiplicité 2, et -1 comme valeur propre simple.

Cherchons maintenant les espaces propres. D'après la forme précédente de $A_x - I_3$, la famille $\left\{{}^t(1, 0, \sqrt{1-x^2}), {}^t(0, 1, -x)\right\}$ est una famille d'éléments de $E_1(A_x)$, clairement libre, donc une base de cet espace propre. Enfin,

$$A_x + I_3 = \begin{pmatrix} x^2+1 & x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & 2-x^2 & -x \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que ${}^t(\sqrt{1-x^2}, -x, -1)$ est dans le noyau de cette base, donc forme une base de $E_{-1}(A_x)$. Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La matrice } A_x \text{ admet 1 et } -1 \text{ pour valeurs propres, d'espaces propres respectifs} \\ E_1(A_x) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -x \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad E_{-1}(A_x) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2} \\ -x \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \end{array}}$$

(d) On sait que les espaces $E_1(A_x)$ et $E_{-1}(A_x)$ sont en somme directe. Puisque l'un est de dimension 2 et l'autre de dimension 1 dans $\mathbb{R}^3$, ils sont supplémentaires. En remarquant qu'ils sont de plus orthogonaux (car la base de $E_1(A_x)$ est orthogonale au vecteur qui engendre $E_{-1}(A_x)$), on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{L'endomorphisme } \varphi_x \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } E_1(A_x), \\ \text{c'est-à-dire le sous-espace vectoriel } \operatorname{Vect}\left\{{}^t(1, 0, \sqrt{1-x^2}), {}^t(0, 1, -x)\right\}. \end{array}}$$

2 ——— $(*)$ ———

Soit $n \geq 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;2n+1]\!]}$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1; 2n+1]\!], \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice A est définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est donc clair qu'elle est de rang 2, ce qui signifie que son noyau est de dimension $2n-1$. Ainsi, 0 est valeur propre de multiplicité au moins $2n-1$. Notons donc λ et μ les deux dernières valeurs propres, éventuellement complexes. On sait alors que

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \operatorname{Tr}(A) \\ \lambda^2 + \mu^2 = \operatorname{Tr}(A^2) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \lambda + \mu = \operatorname{Tr}(A) \\ \lambda \cdot \mu = \dfrac{1}{2}\left[(\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}(A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right] \end{cases}$$

Il s'avère que $\operatorname{Tr} A = n+1$. De plus, la diagonale de A^2 est donnée par $(2n+1, n+1, 2n+1, \ldots, 2n+1, n+1, 2n+1)$ et donc

$$\operatorname{Tr}(A^2) = (n+1)(2n+1) + n(n+1) = (n+1)(3n+1)$$

En reportant ces deux valeurs dans le système précédent, il vient

$$\lambda + \mu = n+1 \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot \mu = -n(n+1)$$

donc λ et μ sont les deux racines du polynôme du second degré $X^2 - (n+1)X - n(n+1)$. Son discriminant est

$$\Delta = (n+1)^2 + 4n(n+1) = (n+1)(5n+1)$$

et donc $$\{\lambda, \mu\} = \left\{\frac{1}{2}\left(n+1+\sqrt{(n+1)(5n+1)}\right), \frac{1}{2}\left(n+1-\sqrt{(n+1)(5n+1)}\right)\right\}$$

Pour conclure, $\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet 0 pour valeur propre de multiplicité } 2n-1, \text{ et deux valeurs propres simples, } \lambda_1 = (n+1+\sqrt{\Delta})/2 \text{ et } \lambda_2 = (n+1-\sqrt{\Delta})/2 \text{ avec } \Delta = (n+1)(5n+1).}$

3 ——— $(**)$ ———

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

Si P est inversible, alors A et B sont semblables donc ont même spectre. Sachant que le spectre d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours non vide, on en déduit le résultat dans ce cas particulier.

Supposons donc P non inversible et notons r le rang de P, qui appartient à $[\![1; n-1]\!]$. Il existe deux matrices U et V inversibles telles que $P = UJ_rV$ avec J_r définie par blocs par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons alors que

$$AP = PB \qquad \text{d'où} \qquad AUJ_rV = UJ_rVB \qquad \text{soit} \qquad (U^{-1}AU)J_r = J_r(VBV^{-1})$$

Notons par la suite $C = U^{-1}AU$ et $D = VBV^{-1}$. Si l'on justifie que C et D ont une valeur propre commune, il en sera de même de A et B, car elles sont respectivement semblables à C et D, donc ont les mêmes spectres que ces matrices.
Traduisons maintenant la relation $CJ_r = J_rD$ par un produit par blocs. Notons,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

Alors $$CJ_r = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_rD = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad C_1 = D_1 \quad \text{et} \quad C_3 = D_2 = 0$$

Les matrices C et D sont donc triangulaires par blocs (supérieurs pour C, inférieur pour D) ce qui impose

$$\chi_C = \chi_{C_1} \cdot \chi_{C_4} \qquad \text{et} \qquad \chi_D = \chi_{D_1} \cdot \chi_{D_4}$$

Il suffit maintenant de considérer une racine λ quelconque de χ_{C_1} qui est égal à χ_{D_1} pour obtenir une racine commune de χ_D et χ_D. Alors, λ est une valeur propre commune A et B. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ ont une valeur propre commune.}}$$

4 ——— $(*)$ ———

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. On pose $f = u + v$. Montrer que toute valeur propre de v est valeur propre de f.

Puisque u et v commutent, les sous-espaces propres de v sont stables par u. Soit donc λ une valeur propre de v, et $\widetilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(v)$. Alors, $\widetilde{u}$ est nilpotent puisque u l'est donc non injectif. Il s'ensuit qu'il existe $x \in E_\lambda(v)$ non nul tel que

$$\widetilde{u}(x) = 0 \qquad \text{donc} \qquad u(x) = 0 \quad \text{et} \quad v(x) = \lambda x \qquad \text{d'où} \qquad f(x) = u(x) + v(x) = \lambda x$$

Par suite, x est bien vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, qui est donc un élément du spectre de f. Ainsi,

$$\boxed{\text{Toute valeur propre de } v \text{ est valeur propre de } f.}$$

5 ——— $(**)$ ———

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe deux complexes α et β tels que

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$$

Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre en commun.

Traitons dans un premier temps le cas $\alpha = \beta = 0$. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, f admet au moins une valeur propre λ. Puisque f et g commutent, $E_\lambda(f)$ est stable par g. Notons $\widetilde{g}$ l'endomorphisme induit. Alors $\widetilde{g}$ admet également un vecteur propre en tant qu'endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Ce vecteur est alors vecteur propre à la fois de f et g. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ commutent, elles ont au moins un vecteur propre commun.}}$$

Supposons maintenant $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Sans perdre de généralité, on peut supposer $\beta \neq 0$. Posons alors $\widetilde{g} = g + \alpha f / \beta$. L'hypothèse devient alors

$$f \circ \left(\widetilde{g} - \frac{\alpha}{\beta} f\right) - \left(\widetilde{g} - \frac{\alpha}{\beta} f\right) \circ f = \beta \widetilde{g} \qquad \text{soit} \qquad f \circ \widetilde{g} - \widetilde{g} \circ f = \beta \widetilde{g}$$

Remarquons que $\widetilde{g}$ ne peut être bijectif, sans quoi

$$\widetilde{g}^{-1} \circ f \circ g - f = \beta I_d \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Tr}\left(\widetilde{g}^{-1} \circ f \circ \widetilde{g} - f\right) = \operatorname{Tr}\left(\widetilde{g}^{-1} \circ f \circ \widetilde{g}\right) - \operatorname{Tr} f = \beta \operatorname{Tr} I_d = \beta \dim E$$

Or, les f et $\widetilde{g}^{-1} \circ f \circ \widetilde{g}$ ont même trace, donc $\beta \dim E = 0$ ce qui est absurde dès lors que β est non nul. Ainsi, $\widetilde{g}$ n'est pas inversible et son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

Notons alors que le noyau de $\widetilde{g}$ est stable par f. En effet, si $x \in \operatorname{Ker} \widetilde{g}$, alors $\widetilde{g}(x) = 0$ et donc

$$(f \circ \widetilde{g})(x) - (\widetilde{g} \circ f)(x) = \beta \widetilde{g}(x) \qquad \text{d'où} \qquad \widetilde{g}(f(x)) = 0$$

Si l'on note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Ker} \widetilde{g}$, ce dernier admet au moins une valeur propre et un vecteur propre associé, qui est vecteur propre également de $\widetilde{g}$ pour la valeur propre 0. On vérifie alors immédiatement par définition de $\widetilde{g}$ qu'il s'agit d'un vecteur propre à f et à g. Pour conclure,

$$\boxed{\text{Si } f \circ g - g \circ f \in \operatorname{Vect}\{f, g\}, \text{ alors } f \text{ et } g \text{ ont un vecteur propre en commun.}}$$

6 ——— $(**)$ ———

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $L \neq 0$ telle que

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

En exprimant A^n en fonction du terme général de la suite ci-dessus, montrer que 1 est valeur propre de A.

Notons pour tout $n \geq 1$, $$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

Remarquons alors que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$nU_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \qquad \text{puis} \qquad A^n = (n+1)U_{n+1} - nU_n$$

Montrons maintenant que $L(A - I_p)$ est la matrice nulle. Sachant que $L \neq 0$, il s'en déduira que $A - I_p$ ne peut être inversible, et donc que 1 est bien valeur propre de A. Par définition,

$$\begin{aligned}
L(A - I_p) &= \Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\Big)(A - I_p) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(A^{k+1} - A^k)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}(A^n - I_p)\right] \\
L(A - I_p) &= \lim_{n\to+\infty} \left[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)U_{n+1} - U_n - \frac{1}{n} I_p\right]
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, le terme de droite converge vers la matrice nulle car $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. Par unicité de la limite, il vient $L(A - I_p) = 0$, ce qui permet de conclure d'après le raisonnement précédent.

$$\boxed{\text{Le réel 1 est valeur propre de } A.}$$

7 ——— (∗) ———

Soient α, β et m trois réels. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & -1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

A quelle condition sur m, α et β ces matrices sont-elles semblables ?

Il s'agit en fait de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A soit diagonalisable avec deux valeurs propres α et β de multiplicités 2. Calculons le polynôme caractéristique de A. Par définition,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -m - X & -1 & m & 1 \\ -1 & 1 - X & -1 & 1 \\ m & -1 & -m - X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - X \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$ puis $C_1 \longleftarrow C_1 - C_3$, il vient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -2m - X & -1 & m & 1 \\ 0 & 1 - X & -1 & 1 \\ 2m + X & -1 & -m - X & 1 \\ 0 & 2 - X & 0 & 2 - X \end{vmatrix} = (2 - X)(X + 2m) \begin{vmatrix} -1 & -1 & m & 1 \\ 0 & 1 - X & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -m - X & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On effectue maintenant les opérations $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ puis $C_2 \longleftarrow C_2 - C_4$ et il vient avec deux développement par rapport à la première colonne, puis la dernière ligne

$$\chi_A = (2 - X)(X + 2m) \begin{vmatrix} -1 & -2 & m & 1 \\ 0 & -X & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -X & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X - 2)(X + 2m)(X^2 - 4)$$

soit finalement $$\chi_A = (X - 2)^2(X + 2m)(X + 2)$$

La matrice A admet donc 2 comme valeur propre de multiplicité au moins 2 (3 si $m = -1$), et -2 comme valeur propre de multiplicité au moins 1 (2 si $m = 1$). Ainsi, il faut nécessairement que $m = 1$ et que $\{\alpha, \beta\} = \{-2, 2\}$ pour que A et B soient semblables.

Réciproquement, si $m = 1$, on a

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A + 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si l'on note C_1, C_2, C_3, C_4 les vecteurs colonnes de $A - 2I_4$, on constate que $\{C_1, C_2\}$ est libre tandis que $C_3 = 2C_2 - C_1$ et $C_4 = -C_2$. Ainsi, cette matrice est de rang 2, ce qui prouve que $E_2(A)$ est de dimension 2. On prouve de même que $E_{-2}(A)$ est de dimension 2, ce qui permet de conclure que A est diagonalisable, avec donc -2 et 2 comme valeurs propres de multiplicités 2. Finalement,

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables si et seulement si } m = 1 \text{ et } \{\alpha, \beta\} = \{-2, 2\}.}$$

8 —— (**) ——

Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_1, \ldots, b_{n-1}$ des complexes. A quelle condition la matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de rang au plus 2 donc son noyau est de dimension au moins $n-2$ et 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-2$. Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & a_{n-1} \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & -X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, il vient

$$\chi_A = (-X)^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k} a_k \begin{vmatrix} B_{k-1} & 0 \\ (\star) & C_{n-k} \end{vmatrix}$$

avec $$B_{k-1} = \begin{pmatrix} -X & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & -X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad C_{n-k} = \begin{pmatrix} 0 & -X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -X \\ b_k & \cdots & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$$

On a immédiatement $\det B_{k-1} = (-X)^{k-1}$, et en développant par rapport à sa première colonne

$$\det C_{n-k} = (-1)^{n-k+1} b_k (-X)^{n-k-1} = b_k X^{n-k-1}$$

et donc $$\chi_A = (-1)^n X^{n-2} \Big(X^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \Big)$$

Il convient maintenant de distinguer deux cas :

- Si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k = 0$, le polynôme caractéristique n'admet que 0 comme racine. La matrice A n'admet donc que 0 pour valeur propre et n'est diagonalisable que si c'est la matrice nulle.
- Si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \neq 0$, cette quantité admet deux racines complexes δ et $-\delta$ opposées et non nulles. L'espace propre associé à ces deux valeurs propres étant de dimension au moins 1, et la somme totale des dimensions des espaces propres ne pouvant excéder n, on en déduit que $E_0(A)$ est de dimension $n-2$ exactement, tandis que $E_\delta(A)$ et $E_{-\delta}(A)$ sont de dimension 1. De surcroît, A est nécessairement diagonalisable.

Pour conclure, $$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable si et seulement elle est nulle ou si } \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \neq 0.}$$

9 —— (*) ——

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. La matrice B définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Notons $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie immédiatement que ${}^t(1,-1)$ et ${}^t(1,1)$ sont deux vecteurs propres de M associés aux valeurs propres respectives 0 et 2. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Par analogie avec ce cas, on est amené à poser plus généralement

$$P = \begin{pmatrix} S & S \\ -S & S \end{pmatrix}$$

où S est telle que $D = S^{-1}AS$ soit une matrice diagonale (sachant que A est diagonalisable). On vérifie alors via le produit par blocs que P est bien inversible d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1}/2 & -S^{-1}/2 \\ S^{-1}/2 & S^{-1}/2 \end{pmatrix}$$

puis toujours par calcul par blocs que $\qquad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2S^{-1}AS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix}$

Puisque D est diagonale, cette matrice l'est aussi, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{La matrice } B \text{ est diagonalisable.}}$$

10 ——— (∗∗∗) ———

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B la matrice définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$. A quelle condition sur A cette matrice est-elle diagonalisable ?

Soit λ un scalaire quelconque et $Z \in \mathbb{C}^{2n}$. En décomposant Z par blocs, il vient

$$BZ = \lambda Z \iff \left\{ \begin{aligned} Y &= \lambda X \\ AX &= \lambda Y \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} Y &= \lambda X \\ AX &= \lambda^2 X \end{aligned} \right. \qquad \text{ou} \qquad Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On en déduit que λ est valeur propre de B et Z est un vecteur propre associé si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, X est un vecteur propre associé et pour finir $Y = \lambda X$. Supposons donc que λ^2 est une valeur propre de A et notons $\{X_1, \ldots, X_p\}$ une base du vecteur propre associé. Le système précédent démontre alors que

$$E_\lambda(B) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda X_p \\ X_p \end{pmatrix} \right\}$$

Il est donc de dimension p, c'est-à-dire $\dim E_{\lambda^2}(A)$. En particulier, les espaces propres $E_\lambda(B)$ et $E_{-\lambda}(B)$ ont mêmes dimensions. Notons maintenant $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les valeurs propres **non nulles** de A, et μ_i une racine de λ_i pour tout $i \in [\![1;p]\!]$. Il convient de distinguer deux cas :

- Si A est inversible, alors $\text{Sp}(B) = \{\mu_1, -\mu_1, \ldots, \mu_p, -\mu_p\}$ et

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(B)} \dim E_\mu(B) = 2 \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$$

- Si A n'est pas inversible, alors $\text{Sp}(B) = \{0, \mu_1, -\mu_1, \ldots, \mu_p, -\mu_p\}$ et

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(B)} \dim E_\mu(B) = \dim E_0(A) + 2 \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} \dim E_\lambda(A) = 2\Big(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \Big) - \dim E_0(A)$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est inférieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si A est diagonalisable. On en déduit donc que la somme des dimensions des sous-espaces propres de B est inférieure ou égale à $2n$, avec égalité si et seulement si A est inversible et diagonalisable. Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice } B \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est inversible et diagonalisable.}}$$

11 ——— (∗) ———

Soit φ l'application définie par $\qquad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + 3XP' \end{array}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ et que l'endomorphisme induit par φ sur ce sous-espace vectoriel est un endomorphisme diagonalisable.

La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ est évidente, dès lors que si P est de degré n, alors P'' est de degré au plus $n-2$, P' de degré au plus $n-1$, d'où $\varphi(P)$ de degré au plus n. Remarquons ensuite que

$$\varphi(1)=0, \qquad \varphi(X)=3X \qquad \text{et} \qquad \forall k\geq 2,\quad \varphi(X^k)=k(k-1)\left(X^k-X^{k-2}\right)+3kX^k=k(k+2)X^k-k(k-1)X^{k-2}$$

Notons φ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$. Alors sa matrice respectivement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec pour éléments diagonaux les réels 2 à 2 distincts $\{0,3,8,\ldots,n(n+2)\}$. Ainsi, φ_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes et

$$\boxed{\text{La restriction de } \varphi \text{ à } \mathbb{R}_n[X] \text{ est diagonalisable.}}$$

12 ——— $(**)$ ———

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est scindé et tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Dans toute la suite, on note n la dimension de E.

$\boxed{\textbf{(i)} \Longrightarrow \textbf{(ii)}}$ On sait déjà d'après le cours que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$. Soit maintenant F un sous-espace vectoriel stable par u et $\mathcal{B}_1=\{e_1,\ldots,e_p\}$ une base de F (avec $p=\dim F$). Par hypothèse, E admet une base de vecteurs propres $\mathcal{B}=\{f_1,\ldots,f_n\}$. Le théorème de la base incomplète permet alors de compléter $\mathcal{B}_1$ à l'aide d'éléments de $\mathcal{B}$ en une base $\left\{e_1,\ldots,e_p,f_{i_1},\ldots,f_{i_{n-p}}\right\}$ de E. L'espace G engendré par les vecteurs propres $\left\{f_{i_1},\ldots,f_{i_{n-p}}\right\}$ est alors supplémentaire à F et clairement stable par u. Cela étant vrai quel que soit F (l'hypothèse de stabilité est même superflue), cela établit la propriété **(ii)**.

$\boxed{\textbf{(ii)} \Longrightarrow \textbf{(i)}}$ Raisonnons par l'absurde en supposant que u n'est pas diagonalisable. Notons $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de u, et F la somme de ces espaces propres. Par hypothèse, F n'est pas égal à E. De plus, il est clairement stable par u donc admet un supplémentaire G stable par u. Si l'on note u_1 et u_2 les endomorphismes induits sur ces espaces, alors $\chi_u=\chi_{u_1}\cdot\chi_{u_2}$, et puisque χ_u est scindé, il en est de même de χ_{u_2}. On en déduit que u_2 admet au moins une valeur propre et un vecteur propre associé. Ce dernier est par définition d'un induit vecteur propre pour u. C'est absurde dès lors que $G\cap F=\{0\}$ et que F est l'espace engendré par tous les vecteurs propres de u. Par l'absurde, on a donc u diagonalisable.

$$\boxed{\text{Les propriétés } \textbf{(i)} \text{ et } \textbf{(ii)} \text{ sont équivalentes.}}$$

13 ——— $(**)$ ———

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. On définit alors

$$\varphi_f:\ \begin{array}{rcl}\mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E)\\ g & \longmapsto & f\circ g-g\circ f\end{array}$$

(a). Montrer que si f est diagonalisable, alors φ_f l'est également.

(b). Soit α une valeur propre non nulle de φ_f et g un vecteur propre associé. Calculer $(\varphi_f)(g^n)$ pour tout entier n et en déduire que g est nécessairement nilpotent.

(a) Notons n la dimension de E et considérons une base $\mathcal{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base de vecteurs propres de f, associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Pour tout $g\in\mathcal{L}(E)$, si l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)=(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(g))=((\lambda_i-\lambda_j)a_{i,j}\ )_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$$

On en déduit aussitôt que les endomorphismes $(g_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$ dont les matrices respectivement à $\mathcal{B}$ sont les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$ forment une base de vecteurs propres de φ_f. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est diagonalisable, alors } \varphi_f \text{ l'est également.}}$$

(b) Commeçons par remarquer que puisque $f\circ g-g\circ f=\alpha g$, alors

$$\begin{aligned}(\varphi_f)(g^2)&=f\circ g^2-g^2\circ f\\ &=(\alpha g+g\circ f)-g\circ(f\circ g-\alpha g)\\ (\varphi_f)(g^2)&=2\alpha g^2\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate prouve que $\varphi_f(g^n)=n\alpha g^n$ pour tout entier n. Si g n'est pas nilpotent, g^n n'est jamais nul et $n\alpha$ est valeur propre de φ_f pour tout entier n et donc, que φ_f admet une infinité de valeurs propres. C'est absurde car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. Par suite,

$$\boxed{\text{Tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de } \varphi_f \text{ est nilpotent.}}$$

14 ———— $(*)$ ———— **Mines PC 2010**

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ défini par

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix}$$

Montrer que 1 est valeur propre et déterminer l'espace propre associé. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

On vérifie immédiatement que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, alors $\varphi(M) = M$ si et seulement si tous ses coefficients non centraux sont égaux. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Le réel 1 est valeur propre et } E_1(\varphi) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).}$$

Plus généralement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} \varphi(M) = \lambda \cdot M \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b & c & f \\ a & e & i \\ d & g & h \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = \lambda \cdot a & c = \lambda \cdot b \quad f = \lambda \cdot c \\ a = \lambda \cdot d & e = \lambda \cdot e \quad i = \lambda \cdot f \\ d = \lambda \cdot g & g = \lambda \cdot h \quad h = \lambda \cdot i \end{cases} \\ \varphi(M) = \lambda \cdot M \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = \lambda \cdot a & c = \lambda^2 \cdot a \quad f = \lambda^3 \cdot a \\ a = \lambda^8 \cdot a & e = \lambda \cdot e \quad i = \lambda^4 \cdot a \\ d = \lambda^7 \cdot a & g = \lambda^6 \cdot a \quad h = \lambda^5 \cdot a \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

- Si $\lambda^8 \neq 1$, alors le système implique que a est nul ce qui implique également la nullité de tous les coefficients autres que e. Mais nécessairement $\lambda \neq 1$ donc e est également nul. Par suite, λ n'est pas valeur propre. Il s'ensuit que tout valeur propre de φ est une racine huitième de l'unité.
- Pour $\lambda = 1$, on retrouve le fait que M est vecteur propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si ses coefficients a, b, c, d, f, g, h et i sont égaux, a et e étant quelconques.
- Enfin si $\lambda \in \mathbb{U}_8 \setminus \{1\}$, on constate que M est un vecteur associé à λ si et seulement si M est de la forme

$$M = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^7 & 0 & \lambda^3 \\ \lambda^6 & \lambda^5 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que λ est bien valeur propre et que $E_\lambda(\varphi)$ est une droite vectorielle.

Pour conclure, φ a pour spectre $\mathbb{U}_8$, soit 8 valeurs propres distinctes, parmi lesquelles 1 a un espace propre associé de dimension 2 tandis que toutes les autres ont un espace propre associé de dimension 1. La somme des dimensions de ces espaces propres étant donc égale à 9, soit la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, il s'ensuite que

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable.}}$$

15 ———— $(**)$ ————

Déterminer les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit X une racine carrée de A. On note a (resp. x) l'endomorphisme canoniquement associé à A (resp. X). Par définition, $x^2 = a$ donc x commute avec a et les sous-espaces propres de a sont stables par x. Puisque A n'admet que 1 comme la valeur propre, d'espace propre associé engendré par ${}^t(1, 0, 0)$, on en déduit que x est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{K}$. Dès lors,

$$AX - XA = \begin{pmatrix} 0 & 2d+3f-2a & 2e+3g-3a-2b \\ 0 & 2f & 2g-2d \\ 0 & 0 & -2f \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} f = 0 \\ g = d = a \\ b = e \end{cases}$$

puis pour finir
$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on en déduit successivement que $a \in \{-1, 1\}$, puis que $b = 1/a = a$, et enfin que $c = 1/a = a$ également. Il y a donc au plus 2 racines de A, et l'on vérifie immédiatement qu'elles conviennent.

$$\boxed{\text{Les racines carrées de } A \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et son opposée.}}$$

16 ——— (∗∗) ——— **X PC 2013**

Déterminer les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation $X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit X solution de l'équation. On note a (resp. x) l'endomorphisme canoniquement associé à A (resp. X). Par définition, x est un polynôme en a donc x commute avec a et les sous-espaces propres de a sont stables par x. Or, A est triangulaire inférieure donc les valeurs propres de A sont 4 et -1, et on trouve facilement ${}^t(0,1)$ et ${}^t(1,-2)$ comme vecteurs propres associés. Si l'on note P la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, on en déduit par stabilité des espaces propres de a par x l'existence de deux réels λ et μ tels que

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'égalité $X^3 - 2X = A$ impose alors
$$\begin{cases} \lambda^3 - 2\lambda = 4 \\ \mu^3 - 2\mu = -1 \end{cases}$$

La première équation admet 2 comme racine évidente, la seconde 1. Cela donne les factorisations

$$\lambda^3 - 2\lambda - 4 = (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+2) \qquad \text{et} \qquad \mu^3 - 2\mu + 1 = (\mu-1)(\mu^2+\mu-1)$$

et finalement, les seules solutions réelles sont $\lambda = 2$ et $\mu \in \big\{1, (\sqrt{5}-1)/2, (1-\sqrt{5})/2\big\}$. Ainsi, l'équation admet au plus trois solutions données par

$$X = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \text{avec} \qquad \mu \in \big\{1, (\sqrt{5}-1)/2, (1-\sqrt{5})/2\big\}$$

On vérifie immédiatement que ces trois matrices sont bien solutions. Finalement, après simplifications,

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{L'équation } X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \text{ admet trois solutions dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (\sqrt{5}-1)/2 & 0 \\ 5-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -(\sqrt{5}+1)/2 & 0 \\ 5+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \end{array}}$$

17 ——— (∗∗) ———

Déterminer une matrice réelle diagonale par blocs semblable à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est donné par

$$M = \begin{vmatrix} -X & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -X & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1-X & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

Un calcul un peu fastidieux donne
$$\chi_M = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$$

Par conséquent, le spectre complexe de M est $\{-i, i\}$ est chacune des valeurs propres est de multiplicité 2. De plus, M étant réelle, il suffit de déterminer un des espaces propres pour obtenir l'autre par conjugaison. Soit donc $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$. On raisonne par équivalence.

$$AX = i\,X \iff \begin{cases} -i\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 & (\mathbf{1}) \\ x_1 - i\,x_2 - 2\,x_3 + 2x_4 = 0 & (\mathbf{2}) \\ x_1 - (1+i)\,x_3 + x_4 = 0 & (\mathbf{3}) \\ x_1 - x_2 + (1-i)\,x_4 = 0 & (\mathbf{4}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - i\,x_2 - 2\,x_3 + 2x_4 = 0 & (\mathbf{2}) \\ i\,x_2 + (1-i)\,x_3 - x_4 = 0 & (\mathbf{5}) = (\mathbf{3}) - (\mathbf{2}) \\ -(1-i)\,x_2 + 2\,x_3 - (1+i)\,x_4 = 0 & (\mathbf{6}) = (\mathbf{4}) - (\mathbf{2}) \\ 2\,x_2 - 2(1+i)\,x_3 + 2i\,x_4 = 0 & (\mathbf{7}) = (\mathbf{1}) + i(\mathbf{2}) \end{cases}$$

Les deux dernières lignes de ce nouveau système sont colinéaires à la deuxième (précisément, $(\mathbf{6}) = (1+i)(\mathbf{5})$ et $(\mathbf{7}) = -2i(\mathbf{5})$). Par suite,

$$AX = i\,X \iff \begin{cases} x_1 - i\,x_2 - 2\,x_3 + 2x_4 = 0 \\ i\,x_2 + (1-i)\,x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - (1+i)\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - (1+i)\,x_3 + i\,x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = x_3\,Z_1 + x_4\,Z_2 \qquad \text{avec} \qquad Z_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\qquad E_i(M) = \mathrm{Vect}\,\{Z_1, Z_2\} \qquad$ et $\qquad E_i(M) = \mathrm{Vect}\,\{\overline{Z_1}, \overline{Z_2}\}$

Notons maintenant $X_1 = \mathrm{Re}\,(Z_1), X_2 = \mathrm{Im}\,(Z_1)$, puis $X_3 = \mathrm{Re}\,(Z_2)$ et enfin $X_4 = \mathrm{Im}\,(Z_2)$. On vérifie facilement que $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$. De plus,

$$M\,Z_1 = i\,Z_1 \qquad \text{donc} \qquad M(X_1 + i\,X_2) = i\,X_1 - X_2 \qquad \text{d'où} \qquad M\,X_1 = -X_2 \quad \text{et} \quad M\,X_2 = X_1$$

On obtient des relations similaires entre X_3 et X_4, ce qui permet de conclure.

La matrice M est semblable à la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

18 ——— (∗∗) ———

Pour toute matrice A, on note $C(A)$ le commutant de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

(a). Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b). Déterminer les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A.

(c). Montrer que $C(A)$ est de dimension 3 et que $C(A) = \mathbb{R}[A]$.

Dans tout l'exercice, on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(a) Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (3-X)\left[(2-X)^2 - 1\right] = (1-X)(3-X)^2$$

De plus, $\qquad A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad$ et $\qquad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\,\{{}^t(1,-1,0)\} \qquad \text{et} \qquad E_3(A) = \mathrm{Vect}\,\{{}^t(1,1,0)\}$$

Notons $x_1 = {}^t(1,-1,0)$ et $x_2 = {}^t(1,1,0)$. On cherche à compléter la famille libre $\{x_1, x_2\}$ par un vecteur x_3 tel que $a(x_3) = 3x_3 + x_2$. Commençons par prendre x_3 arbitraire, par exemple

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad a(x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\,x_3 + x_2$$

Par un coup de bol incroyable (véridique), ce vecteur convient ! Dans la base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$, la matrice de a est de la forme souhaitée donc

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est semblable à } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Soit F un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par a. Alors, on peut introduire l'endomorphisme $\widetilde{a}$ induit par a sur F et on sait que $\chi_{\widetilde{a}}$ divise χ_a. Nécessairement, il s'ensuit que

$$\chi_{\widetilde{a}} = (1-X)(3-X) \qquad \text{ou} \qquad \chi_{\widetilde{a}} = (3-X)^2$$

- Dans le premier cas, $\widetilde{a}$ admet deux vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et 3. Ces deux vecteurs sont donc colinéaires à x_1 et x_2 et engendrent nécessairement $E_1(a) + E_3(a)$. On en déduit que F est égal à la somme des deux sous-espaces propres de F.
- Sinon, $\widetilde{a}$ est trigonalisable et sa matrice dans une base et sa matrice dans une base $\mathcal{B}' = (y_1, y_2)$ avec y_1 vecteur propre pour la valeur propre 3 est de la forme

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\widetilde{a}) = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Le spectre de $\widetilde{a}$ étant réduit à $\{3\}$, on a nécessairement $\beta = 3$ et par suite, on constate que

$$(M - 3I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

Cela se traduit par $\widetilde{a}^2 = 0$, et donc $F \subset \mathrm{Ker}\,(a - 3I_d)^2$. On vérifie facilement que $\mathrm{Ker}\,(a-3I_d)^2 = \mathrm{Vect}\,\{x_2, x_3\}$, qui est de dimension 2, et on peut donc conclure que $F = \mathrm{Ker}\,(a - 3I_d)^2$.

$$\boxed{\text{Les plans vectoriels stables par } a \text{ sont } E_1(a) + E_3(a) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(a - 3I_d)^2.}$$

(c) Soit B qui commute avec A et b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. Alors, b laisse stable les sous-espaces propres de a, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}\,\{x_1\}$ et $\mathrm{Vect}\,\{x_2\}$. De plus, b commute avec $(a - 3I_d)^2$ donc il laisse stable son noyau à savoir $\mathrm{Vect}\,\{x_2, x_3\}$. On en déduit que la matrice de b respectivement à la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Enfin, puisque a et b commutent, il en est de même de R et T. Or,

$$RT - TR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \delta$$

Finalement
$$R \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

ce qui prouve que $C(A)$ est de dimension au plus 3. Sachant que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $C(A)$, il suffit maintenant de montrer par exemple que $\{I_3, A, A^2\}$ (ou plus simplement $\{I_3, T, T^2\}$) est libre pour conclure, ce qui se fait de manière totalement élémentaire (après calcul de A^2 ou T^2). Finalement,

$$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels } C(A) \text{ et } \mathbb{R}[A] \text{ sont égaux et de dimensions 3.}}$$

19 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que
$$3A^3 = A^2 + A + I_p$$

Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de projection que l'on déterminera en fonction de A.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons le reste de la division euclidienne de X^n par $P = X^3 - (X^2+X+1)/3$. On note

$$X^n = Q_n \cdot P + \alpha_n\, X^2 + \beta_n\, X + \gamma_n$$

avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}^3$. Remarquons dans un premier temps que

$$P = \frac{1}{3}(X-1)(3X^2+2X+1) = \frac{1}{3}(X-1)(X-\delta)(X-\overline{\delta}) \qquad \text{avec} \qquad \delta = -(1+i\sqrt{2})/3$$

En remplaçant X par les trois racines de P dans la première égalité, on obtient le système

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n &= 1 \\ \alpha_n\delta^2 + \beta_n\delta + \gamma_n &= \delta^n \\ \alpha_n\overline{\delta}^2 + \beta_n\overline{\delta} + \gamma_n &= \overline{\delta}^n \end{aligned}\right.$$

Les formules de Cramer donnent les expressions des trois inconnues à savoir, en notant Δ le déterminant du système

$$\alpha_n = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta^n & \delta & 1 \\ \overline{\delta}^n & \overline{\delta} & 1 \end{vmatrix} \qquad \beta_n = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta^2 & \delta^n & 1 \\ \overline{\delta}^2 & \overline{\delta}^n & 1 \end{vmatrix} \qquad \gamma_n = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta^2 & \delta & \delta^n \\ \overline{\delta}^2 & \overline{\delta} & \overline{\delta}^n \end{vmatrix}$$

Une expression plus précise des constantes n'est pas nécessaire puisque seule leur limite lorsque n tend $+\infty$ va intervenir. En effet, puisque P annule A, pour tout entier n,

$$A^n = \alpha_n\, A^2 + \beta_n\, A + \gamma_n\, I_p$$

Or, puisque $|\delta| = 1/\sqrt{3} < 1$, il vient par continuité du déterminant que

$$\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \delta & 1 \\ 0 & \overline{\delta} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\delta - \overline{\delta}}{\Delta} \qquad \beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta^2 & 0 & 1 \\ \overline{\delta}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\overline{\delta}^2 - \delta^2}{\Delta} \qquad \gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta^2 & \delta & 0 \\ \overline{\delta}^2 & \overline{\delta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\delta\overline{\delta}(\delta - \overline{\delta})}{\Delta}$$

Le déterminant Δ est le déterminant d'une transposée d'une matrice de Vandermonde. On trouve donc $\Delta = (1-\delta)(1-\overline{\delta})(\delta-\overline{\delta})$ puis

$$(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{|1-\delta|^2}\left(1, -(\overline{\delta}+\delta), |\delta|^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

et donc
$$A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B = \frac{A^2}{2} + \frac{A}{3} + \frac{I_p}{6}$$

Reste à montrer que cette limite est une matrice projection. Pour cela, il suffit de passer à la limite dans l'égalité $A^{2n} = A^n \cdot A^n$. On obtient immédiatement par continuité du produit matriciel $B = B^2$.

$$\boxed{\text{La suite } (A^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la matrice de projection } (2A^2+3A+I_p)/6.}$$

20 ——— (∗∗) ———

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{\begin{aligned} a_{n+1} &= (b_n + 3\,c_n)/4 \\ b_{n+1} &= (c_n + 3\,a_n)/4 \\ c_{n+1} &= (a_n + 3\,b_n)/4 \end{aligned}\right.$$

A quelle condition sur a_0, b_0, c_0 ces suites sont-elles convergentes ? Si oui, quelles sont leurs limites respectives ?

Notons
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Alors pour tout entier n, on a $X_{n+1} = AX_n$ et donc par récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$. On est donc amené à étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, commençons par diagonaliser A. Pour gagner du temps, on peut introduire la matrice circulante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{1}{4}\left(J + 3J^2\right)$$

On sait que la matrice circulante est diagonalisable. Plus précisément, pour $n=3$, on a $\mathrm{Sp}(J)=\left\{1,j,j^2\right\}$ avec $j=e^{2i\pi/3}$ et

$$P^{-1}JP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}\qquad\text{ou}\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j^4\end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(j+3j^2)/4&0\\0&0&(j^2+3j)/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-2-i\sqrt{3})/4&0\\0&0&(-2+i\sqrt{3})/4\end{pmatrix}$$

Notons maintenant $\lambda=-1/2+i\sqrt{3}/4$. On peut remarquer que $|\lambda|=\sqrt{7}/4<1$. Dès lors,

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\overline{\lambda}^n&0\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et donc
$$X_n=A^nX_0\xrightarrow[n\to+\infty]{}P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}X_0$$

Notons $Y_0=P^{-1}X_0={}^t(r_0,s_0,t_0)$ de sorte que $X_0=PY_0$ et donc

$$\left\{\begin{aligned}r_0+s_0+t_0&=a_0\\r_0+j\,s_0+j^2\,t_0&=b_0\\r_0+j^2\,s_0+j^4\,t_0&=c_0\end{aligned}\right.$$

Avec ces notations, on constate que

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}X_0=P\begin{pmatrix}r_0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_0\\r_0\\r_0\end{pmatrix}$$

Il suffit donc d'exprimer r_0 en fonction de a_0,b_0 et c_0 pour conclure, ce qui s'obtient en sommant toutes les lignes du système précédent. Sachant que $j^4=j$ et que $1+j+j^2=0$, il vient $r_0=(a_0+b_0+c_0)/3$. On peut donc conclure.

$\boxed{\text{Les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent quelles que soient les valeurs de } a_0,\ b_0 \text{ et } c_0 \text{ et ont pour limite commune } (a_0+b_0+c_0)/3.}$

21 — $(*)$ — **CCP PC 2008**

Soit E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $(u(x)|x)=0$ pour tout vecteur x.

(a). Montrer que le spectre de u est inclus dans $\{0\}$.

(b). Montrer que $(u(x)|y)=-(x|u(y))$ pour tous x,y dans E.

(c). Monter que $E=\mathrm{Im}\ u\oplus\mathrm{Ker}\ u$.

(d). Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\ u$.

- (i) Montrer que v est bijectif.
- (ii) Montrer que le polynôme caractéristique de v n'a pas de racines réelles.
- (iii) Montrer que le rang de u est pair.

(e). Soit $a\in\mathbb{R}^3$. On définit
$$u_a:\ \begin{aligned}\mathbb{R}^3&\longrightarrow\mathbb{R}^3\\x&\longmapsto a\wedge x\end{aligned}$$

- (i) Déterminer une relation entre $(u_a(x)|y)$ et $(x|u_a(y))$.
- (ii) Déterminer le rang de u_a.

(a) Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$ et x un vecteur propre associé. Alors,

$$u(x)=\lambda\,x\qquad\text{d'où}\qquad u(x)|x=\lambda(x|x)=\lambda\,||x||^2$$

Or par hypothèse, $u(x)|x=0$ donc $\lambda\,||x||^2=0$ puis $\lambda=0$ car x est non nul par hypothèse. Par conséquent,

$\boxed{\text{Le spectre de } u \text{ est inclus dans } \{0\}.}$

(b) Soient $x, y \in E$. Par hypothèse, $$u(x+y)|(x+y) = 0$$

Par ailleurs, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} u(x+y)|(x+y) &= \big(u(x)+u(y)\big)|(x+y) \\ &= u(x)|x + u(x)|y + u(y)|x + u(y)|y \end{aligned}$$

Or de la même manière, $u(x)|x = u(y)|y = 0$ donc

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad u(x)|y = -u(y)|x}$$

(c) D'après le théorème du rang, on a $\dim E = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u$. Il suffit donc de montrer que l'intersection de Ker u et Im u est réduite à $\{0\}$. Soit donc $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. Alors, $u(x) = 0$ et il existe y tel que $x = u(y)$. Alors, d'après la question précédente,

$$||x||^2 = x|x = x|u(y) = -u(x)|y = 0$$

Ainsi, x est nul ce qui achève la preuve.

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u}$$

(d.i) Il suffit de remarquer que par définition, Ker v est l'intersection de Im u et Ker u donc $\{0\}$ d'après la question précédente. Ainsi, v est injectif donc bijectif car E est de dimension finie.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } v \text{ induit par } u \text{ sur Im } u \text{ est bijectif.}}$$

(d.ii) On sait que le polynôme caractéristique de v divise celui de u. Or, χ_u n'admet que 0 comme racine réelle, donc il en est de même de χ_v. Mais puisque v est bijectif, 0 n'est pas valeur propre donc racine de son polynôme caractéristique. On peut donc conclure.

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } v \text{ n'admet pas de racines réelles.}}$$

(d.iii) Puisque χ_v n'admet pas de racines réelles, son degré est nécessairement pair. Or, son degré est égal à la dimension de Im u, c'est-à-dire le rang de u. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le rang de } u \text{ est pair.}}$$

(e.i) On vérifie immédiatement par propriété du produit vectoriel que $u_a(x)|x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. D'après la question (b), il s'ensuit aussitôt que

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad u_a(x)|y = -x|u_a(y)}$$

(e.ii) D'après le résultat de la question (d.iii), le rang de u_a est pair. Mais si a est non nul, alors u_a n'est pas l'endomorphisme nul car l'image d'un élément orthogonal à a n'est pas nulle. Puisque u_a est de rang au plus 3, on en déduit que

$$\boxed{\text{Le rang de } u_a \text{ vaut 2 si } a \text{ est non nul et 0 sinon.}}$$

22 ——— (∗∗) ———

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $f^3 = 2f^2 - f$.

(a) Montrer que si f est diagonalisable, alors f est un projecteur.

On suppose pour la suite que f est de rang 2.

(b) Montrer que 1 est valeur propre de f.

(c) Montrer que $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - I_d)^2$.

(d) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle f admet une matrice par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad I_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

(a) Le polynôme $X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$ annule f donc le spectre de f est inclus dans l'ensemble de ses racines soit $\{0, 1\}$. Si f est diagonalisable, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale avec des éléments diagonaux appartenant à $\{0, 1\}$. Une telle matrice est celle d'un projecteur donc

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est diagonalisable, alors } f \text{ est un projecteur.}}$$

(b) L'hypothèse sur f se réécrit $f \circ (f - I_d)^2 = 0$. Si 1 n'est pas valeur propre de f, alors $f - I_d$ est bijectif, donc en composant deux fois par son inverse, on obtient $f = 0$ ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le réel 1 est valeur propre de } f.}$$

(c) On procède en deux temps :

- Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f - I_d)^2$. Alors,
$$f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad (f - I_d)^2(x) = 0 \qquad \text{soit} \qquad f^2(x) - 2f(x) + x = 0$$
Il s'ensuit que x est nul. L'intersection de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - I_d)^2$ est donc réduite au singleton $\{0\}$.
- Soit x un élément de $\mathbb{C}^n$ quelconque. Par hypothèse,
$$\big(f \circ (f - I_d)^2\big)(x) = \big((f - I_d)^2 \circ f\big)(x) = 0 \qquad \text{soit} \qquad f^2(x) - 2f(x) + x \in \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad f(x) \in \operatorname{Ker}(f - I_d)^2$$
Cela permet d'écrire $$x = \big(f^2(x) - 2f(x) + x\big) - (f - 2I_d)\,(f(x))$$
Dans cette décomposition, le premier élément est dans $\operatorname{Ker} f$ d'après ce qui précède. Le second appartient à $\operatorname{Ker}(f - I_d)^2$ car $f(x)$ lui appartient et que le sous-espace vectoriel est stable par $f - 2I_d$, dès lors que $(f - I_d)^2$ et $f - 2I_d$ commutent (ce sont deux polynômes en f). On a donc bien justifié que E est la somme de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - I_d)^2$.

Finalement $$\boxed{\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - I_d)^2}$$

(d) Dans la somme directe de la question précédente, les deux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - I_d)^2$ sont stables par f. De plus, $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 2 d'après le théorème du rang. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe, la matrice de f est donc diagonale par blocs de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

où A est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Ker}(f - I_d)^2$. Il reste donc à justifier que l'on peut choisir $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la base de $\operatorname{Ker}(f - I_d)^2$, pour que A soit de la forme I_α. Remarquons à cet effet que par définition, si l'on note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur cet espace, on a $(\widetilde{f} - I_d)^2 = 0$. Ainsi, $\widetilde{f} - I_d$ est nipotent donc admet dans une certaine base une matrice triangulaire supérieure stricte. La matrice de f dans cette base est alors de la forme voulue I_α avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Par suite,

Il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle f admet une matrice par blocs de la forme
$$\boxed{\begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad I_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{C}}$$

23 ——— (∗∗) ——— **X PC 2010**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si la trace de A est nulle.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A et $-A$ sont semblables, elles ont notamment même trace, ce qui implique par linéarité de la trace

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(-A) = -\operatorname{Tr}(A) \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Tr} A = 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient λ et μ les deux valeurs propres de A, éventuellement confondues. La trace de A étant nulle, on a $\lambda = -\mu$. Distinguons plusieurs cas.

- Si A est diagonalisable, elle est semblable à
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
Or, B est clairement semblable à $-B$: si l'on note b l'endomorphisme qui lui est canoniquement associée, il suffit d'inverser les deux vecteurs de la base canonique pour avoir une nouvelle base dans laquelle la matrice de b est $-B$. Il est clair que si X est semblable à Y, et que Y est semblable à Z, alors X est semblable à Z (on dit que la relation de similitude est transitive). Dès lors, A est semblable à $-A$.
- Si A n'est pas diagonalisable, elle admet nécessairement une valeur propre double et elle est trigonalisable. Ainsi, $\lambda = \mu$ donc $\lambda = \mu = 0$ et A est semblable à
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Cette matrice est à nouveau semblable à son opposé. Si l'on note c l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé, il suffit cette fois de remplacer l'un des vecteurs de la base canonique par son opposé pour obtenir une base dans laquelle c a pour matrice $-C$. A nouveau, on peut conclure que A est semblable à $-A$.

$$\boxed{\text{Un élément } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à son opposé si et seulement si sa trace est nulle.}}$$

24 ——— (∗∗) ———

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme diagonalisable de E. Pour tout $x \in E$, on note U_x le sous-espace vectoriel engendré par $\{u^k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$.

(a). Déterminer une base de U_x.

(b). A quelle condition portant sur les valeurs propres de u existe-t-il un élément x de E tel que $U_x = E$?

(a) On suppose x non nul sans quoi $U_x = \{0\}$ et une base de $U_x = \emptyset$. Soit p le plus petit entier tel que $\{x, u(x), \ldots, u^p(x)\}$ soit libre. Par définition, $\{x, u(x), \ldots, u^{p+1}(x)\}$ est liée ce qui impose nécessairement que $u^{p+1}(x)$ est combinaison linéaire de $\{x, u(x), \ldots, u^p(x)\}$. On démontre alors par récurrence immédiate qu'il en est de même de $u^k(x)$ pour tout $k \geq p+1$. Ainsi, la famille $\{x, u(x), \ldots, u^p(x)\}$ est libre (par définition) et génératrice de U_x donc c'est une base de U_x.

$$\boxed{\text{Une base de } U_x \text{ est } \{x, u(x), \ldots, u^p(x)\} \text{ où } p \text{ est le plus petit entier pour lequel cette famille est libre.}}$$

(b) Supposons qu'il existe x tel que $U_x = E$ (on dit alors que u est cyclique). Notons alors $\mathcal{B} = \{x, u(x), \ldots, u^p(x)\}$ avec p défini comme à la question précédente. Nécessairement, puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, on a $p = n-1$ et la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est une matrice compagnon, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Notons alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $A - \lambda I_n$ est de rang au moins $n-1$, ce qui implique que les sous-espaces propres de A sont tous de dimensions au plus 1. Si u est diagonalisable, cela implique donc que u admet n valeurs propres distinctes.

Réciproquement, supposons que u admet n valeurs propres distinctes, et considérons une base $\mathcal{B}' = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de vecteurs propres, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ et alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u^k(x) = \sum_{p=1}^{n} x_p\, {\lambda_p}^k e_p \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1\lambda_1 & \cdots & x_1{\lambda_1}^{n-1} \\ x_2 & x_2\lambda_2 & \cdots & x_2{\lambda_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n\lambda_n & \cdots & x_n{\lambda_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

On reconnaît aux scalaires $x_1, \ldots, x_n$ près un déterminant de Vandermonde et ainsi

$$\det_{\mathcal{B}'}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Si l'on choisit x dont les coordonnées sont toutes non nulles dans $\mathcal{B}'$, par exemple $x = e_1 + \cdots + e_n$, il s'ensuit que le déterminant de la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ dans la base $\mathcal{B}'$ est non nulle, donc que la-dite famille est une base de E. Cela établit la réciproque.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe } x \text{ tel que } E = U_x \text{ si et seulement si } u \text{ admet} \\ n \text{ valeurs propres distinctes (lorsque } u \text{ est diagonalisable).}\end{array}}$$

Remarque : On aurait pu utiliser la seconde méthode pour démontrer le sens direct en remarquant que si deux valeurs propres sont égales, alors le déterminant est nul quel que soit le choix des coordonnées de x. Mais on passe à coté du lien entre les matrices compagnons et les endomorphismes cycliques.

25 ——— (∗∗∗) ——— **X PC 2013**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ deux à deux distincts tels que $A + \lambda_i B$ soit nilpotente pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Notons
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & \lambda & \longmapsto & \chi_{A+\lambda B} = \det(X\, I_n - (A + \lambda B)) \end{array}$$

Le déterminant d'une matrice de taille n est une somme de produits d'au plus n coefficients de cette matrice (preuve immédiate par récurrence sur n et développement par rapport à une ligne ou une colonne). On en déduit l'existence de polynômes P_0, P_1, …, P_n appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$ tels que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \varphi(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)\,X + \cdots + P_n(\lambda)\,X^n$$

Rappelons qu'une matrice est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à X^n. Par conséquent, pour tout $k \in [\![1;n+1]\!]$

$$P_0(\lambda_k) + P_1(\lambda_k)\,X + \cdots + P_n(\lambda_k)\,X^n = X^n$$

et donc, par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$P_0(\lambda_k) = P_1(\lambda_k) = \cdots = P_{n-1}(\lambda_k) = P_n(\lambda_k) - 1 = 0$$

On en déduit que les polynômes P_0, P_1, …, P_{n-1} et $P_n - 1$ s'annulent en $n+1$ points distincts. Sachant qu'ils appartiennent tous à $\mathbb{K}_n[X]$, ils sont donc nuls et

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \chi_{A+\lambda B} = X^n$$

Pour $\lambda = 0$, on obtient donc $\chi_A = X^n$, ce qui prouve que A est nilpotente. Pour ce qui est de la matrice B, il faut un peu bidouiller. Utilisons l'application $M \longmapsto \chi_M$, dont les fonctions coordonnées respectivement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont polynomiales donc continues. Il s'ensuite que

$$\chi_B = \lim_{\lambda\to+\infty} \chi_{B+A/\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \det\left(XI_n - B - \frac{A}{\lambda}\right)$$

Or, pour tout λ,

$$\begin{aligned}\det\left(XI_n - B - \frac{A}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\lambda^n}\det\left(\lambda XI_n - A - \lambda B\right)\\ &= \frac{1}{\lambda^n}\chi_{A+\lambda B}(\lambda X)\\ \det\left(XI_n - B - \frac{A}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\lambda^n}(\lambda X)^n = X^n\end{aligned}$$

Par suite,

$$\chi_B = \lim_{\lambda\to+\infty} X^n = X^n$$

ce qui prouve que B est également nilpotente.

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont nipotentes.}}$$

26 ——— (∗) ——— **Mines PC 2013**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$.

(a). Comparer la trace de u et celle de v.

(b). On suppose v diagonalisable. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

(a). Notons que $\operatorname{Im} u$ est bien stable par u, puisque par exemple, u commute avec lui-même. Si l'on considère une base $\mathcal{B}_\prime$ de $\operatorname{Im} u$ que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u respectivement à la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$ (c'est-à-dire v) respectivement à $\mathcal{B}_0$. Ainsi, la trace de u est égale à celle de A, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } u \text{ et } v \text{ ont mêmes traces.}}$$

(b). La réponse est non. Il suffit de prendre un endomorphisme nilpotent d'ordre 2, c'est-à-dire un endomorphisme u tel que $u^2 = 0$ mais $u \neq 0$. Alors, v est l'endomorphisme nul par définition et est donc diagonalisable. Cependant, u n'est pas diagonalisable car s'il l'était, ce serait nécessairement l'endomorphisme nul.

$$\boxed{\text{La diagonalisabilité de l'endomorphisme } v \text{ induit sur } \operatorname{Im} u \text{ n'implique pas nécessairement celle de } u.}$$