

Continuité, dérivabilité

1 _____ (*) _____

(a). Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

(b). Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = 5\pi/4$.

2 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow{+\infty} \ell$.

3 _____ (*) _____

On cherche à déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ f)(x) = 3 + \frac{x}{2} \quad (*)$$

(a). Soit α un réel quelconque. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3 + u_n/2$$

(b). Justifier que si f satisfait (*), alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(3 + \frac{x}{2}\right) = 3 + \frac{f(x)}{2}$

Conclure.

4 _____ (**) _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $P_n(x)$ la quantité définie par

$$P_n(x) = (x^2 + 1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x - \cotan \varphi}{x^2 + 1} \right)$$

Montrer que P_n est une application polynomiale de degré n et déterminer ses racines.

5 _____ (*) _____

Soit I un intervalle inclus dans $]0; +\infty[$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et enfin a, b deux éléments distincts de I . Montrer que si la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ passe par l'origine, alors il existe $c \in I$ tel que la tangente à la courbe en $(c, f(c))$ passe par l'origine.

6 _____ (*) _____

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue, non constante et telle que $f \circ f = f$. Soit $a < b$ les deux réels tels que $f([0; 1]) = [a; b]$.

(a). Montrer que f est l'identité sur $[a; b]$.

(b). Montrer que si f est de plus dérivable sur $[0; 1]$, alors f est l'identité sur $[0; 1]$.

(c). Donner un exemple d'application de $[0; 1]$ dans lui-même continue, non constante, distincte de l'identité et telle que $f \circ f = f$.

7 _____ (**) _____

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; +\infty[, \mathbb{R}))$ telle que f admet $f(a)$ pour limite en $+\infty$. Montrer que $f([a; +\infty[)$ est un segment et en déduire qu'il existe $\alpha \in [a; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Intégrale sur un segment

8 _____ (*) _____

Etablir des formules de récurrence entre les intégrales suivantes

$$(a) \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx \quad (b) \quad J_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)} dx \quad (c) \quad K_n = \int_1^e \ln^n(x) dx$$

En déduire les valeurs de ces intégrales pour $n = 3$.

9 _____ (*) _____

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Justifier l'équivalent $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2 \ln x}$.

10 _____ (**) _____

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad I = F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

- (a). Montrer que $I > 0$ et qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a; b]$.
 (b). Montrer que F admet une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.
 (c). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence et l'unicité de $x_0, \dots, x_n$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt = \frac{I}{n}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

- (d). Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $J = \frac{1}{I} \int_a^b f(t)^2 dt$.
 (e). On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $u_n - J = O(1/n)$.

11 _____ (*) _____ **Centrale PC 2009**

Soit E l'ensemble des applications continues de $[0; 1]$ dans lui-même. Déterminer l'ensemble des éléments f de E tels que

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t)^2 dt$$

12 _____ (**) _____ **ENS PC 2014**

Soient $a < b$ deux réels. Déterminer toutes les éléments f de $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall c < d \in [a; b], \quad \frac{1}{d-c} \int_c^d f(t) dt = \frac{f(c) + f(d)}{2}$$

13 _____ (**) _____ **X PC 2016**

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, et $\{x\}$ sa partie décimale (on a donc $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$).

- (a). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

- (b). On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,
- $$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ln(k)}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Formules de Taylor et applications

14 _____ (*) _____

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

15 _____ (**) _____ **CCP PC 2011**

Soit $f : x \mapsto (e^{x^2} - 1)/x$ prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

- (a) Montrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
 (b) Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f , f^3 et f^5 .
 (c) (5/2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que f est $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante.
 (d) Vérifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est également $\mathcal{C}^\infty$ et impaire.
 (e) Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f^{-1}(x)$.

16 _____ (**) _____

Déterminer un développement asymptotique à 2 termes en 1 de $x \mapsto \arcsin x$.

17 _____ (**) _____

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0; 1]$ tel que $|f''(\alpha)| \geq 4$.

18 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tout entier n , on ait $f^{(n)}(x_n) = 0$.

19 _____ (**) _____

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et x tel que $f''(x) \neq 0$.

(a). Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout réel $h \in [-\eta; \eta]$ non nul, on ait un unique $\theta_h \in]0; 1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta_h h)$$

(b). Montrer en appliquant Taylor-Young à f' et f que l'application $\theta : h \mapsto \theta_h$ admet $\frac{1}{2}$ pour limite en 0.

20 _____ (**) _____ **Mines PC 2014**

Soit $a \in]-1; 1[$. Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt$$

Exercices supplémentaires non corrigés

21 _____ (?) _____ **X PC 2014**

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $(f \circ f)(x) = x$ pour tout réel x .

22 _____ (**) _____ **Mines PC 2024**

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$$

23 _____ (***) _____ **ENS PC 2023**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$M_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}, |P(t)| \leq \epsilon\}$$

Déterminer

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_\epsilon}(x) \cdot |P'(x)| dx$$

où la notation $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 sur A et 0 en dehors).

24 _____ (?) _____ **ENS PC 2024**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$\lambda(t) = \max_{x \in \mathbb{R}} (|f(t)| e^{-tx^2})$$

(a). On suppose $f(0) \neq 0$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)$.

(b). On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de λ en $+\infty$.

(c). Même question en supposant f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'existence d'un entier $k \geq 2$ tel que $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0$.

- 1** (a) Calculer la tangente de cette expression.
(b) Utiliser un argument de monotonie.
- 2** On pourra commencer par traiter le cas où $\ell = 0$ en adaptant la preuve du lemme de Césaro.
- 3** (b) Pour montrer la relation, on pourra s'intéresser à $(f \circ f \circ f)(x)$. Ensuite, à l'aide du (a), montrer que f' est constante.
- 4** Pour prouver que P_n est un polynôme, on pourra raisonner par récurrence sur n . Par la suite, on cherchera une autre expression de P_n à l'aide d'une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $(x + \cotan \varphi)/(1 + x^2)$.
- 5** On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x)/x$.
- 6** (b) On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le fait que si $f([0; 1]) \neq [0; 1]$, alors $a > 0$ ou $b < 1$ et f atteint un de ses extremums dans $]0; 1[$.
- 7** Introduire une bijection φ strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0; 1[$ vers $[a; +\infty[$ et introduire $g = f \circ \varphi$.
- 8** (a) Utiliser une formule de trigonométrie pour trouver une expression simple de $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n .
(b) Même indication qu'au (b) en combinant judicieusement J_n et J_{n+2} .
(c) Intégrer par parties.
- 9** Utiliser une intégration par parties.
- 10** (c) Utiliser la relation de Chasles pour exprimer x_i en fonction de F^{-1} .
(d) Utiliser les sommes de Riemann puis faire un changement de variable impliquant F^{-1} .
(e) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à F pour majorer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt - f(x_i)$.
- 11** Remarquer que $f - f^2$ est continue, positive d'intégrale nulle.
- 12** En fixant c et en faisant varier d , justifier que l'application f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$, puis qu'il s'agit d'une fonction affine.
- 13** (a) On pourra remarquer que sur tout intervalle de la forme $[k; k - 1[$, $x \mapsto \{x\}$ coïncide avec $x \mapsto t - k$, et intégrer par parties

$$\int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) f'(t) dt$$

(b) Appliquer la formule précédente avec $f : t \mapsto e^{2i\pi \ln t}$. La première intégrale se calcule par un changement de variable. Majorer plus ou moins grossièrement les deux autres termes.
- 14** Utiliser un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + t)$.
- 15** (d) Pour montrer que f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$, on pourra commencer par justifier le caractère $\mathcal{C}^1$ puis utiliser l'expression de $(f^{-1})'$.
(e) Justifier l'existence d'un DL de la forme $f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$ et utiliser l'égalité $f^{-1} \circ f = I_d$.
- 16** Soit $y = \arcsin x$. Poser $x = 1 - h$ et $y = \frac{\pi}{2} - t$ et revenir à $\sin$ (au lieu de $\arcsin$).
- 17** Ecrire deux fois l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0; 1/2]$ et $[1/2; 1]$.
- 18** Construire la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence. Etant donné x_n vérifiant $f^{(n)}(x_n) = 0$, on pourra raisonner par l'absurde puis appliquer une formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre $a > x_n$ fixé et $x \geq a$ pour justifier l'existence de x_{n+1} .
- 19** (a) L'existence de θ_h découle du théorème des accroissements finis. Pour son unicité au voisinage de 0, justifier que f' est strictement monotone localement en x .
- 20** Justifier dans un premier temps que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et exprimer $f^{(n)}(x)$ en fonction de f , a et x pour tout entier n et tout réel x . Utiliser ensuite la formule de Taylor avec reste-intégral entre 0 et x pour montrer que f est nulle.