I Noyau de Dirichlet

Pour n entier naturel et t réel, on pose

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} .$$

1. Vérifier la relation $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$ et t réel non multiple entier de 2π, prouver que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $h : [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\, \sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u$$

   tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x .$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\, D_n(u)\, \mathrm{d}u \ .$$

5. En déduire que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\, \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) u\right) \mathrm{d}u \ ,$$

où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.

On admettra que cette fonction h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

6. À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que

$$c_n(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } c_{-n}(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\, e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\, e^{-int} \ .$$