

II. PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$

II.A.1 On sait que la trace Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. En conséquence,

L'ensemble $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, donc un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

De surcroît, Tr est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ car $\text{Tr}(\text{I}_n) = n \neq 0$. De ce fait, $\text{rg}(\text{Tr}) = 1$; on déduit alors du théorème du rang que

$$\dim \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = n^2 = \dim \text{Ker } \text{Tr} + \text{rg}(\text{Tr}) = \dim \mathcal{M}_0(n, \mathbb{K}) + 1$$

si bien que

$$\dim \mathcal{M}_0(n, \mathbb{K}) = n^2 - 1$$

II.A.2 Soient A et $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Par définition, $[A, B] = AB - BA$ donc

$$\text{Tr}[A, B] = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$$

car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ d'après les propriétés de la trace. Ainsi,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \quad [A, B] \in \mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$$

II.B Vérifions d'abord que j est bien défini, puis montrer que c'est un morphisme injectif de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

- Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,

$$\text{Tr } j(x, y, z) = x + (-x) = 0$$

donc $j(x, y, z) \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$, ce qui montre que l'application j est bien définie.

- Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,

$$\begin{aligned} j(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x H_0 + y (X_0 + Y_0) + z J_0 \end{aligned}$$

ce qui montre que j est une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

- Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,

$$\begin{aligned} j(x, y, z) = 0 &\iff \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x = 0 \wedge y+z = 0 \wedge y-z = 0 \wedge -x = 0 \\ &\iff x = 0 \wedge 2y = 0 \wedge 2z = 0 \\ j(x, y, z) = 0 &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

donc j est un morphisme injectif.

- Enfin, d'après le résultat de la question II.A.1,

$$\dim \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) = 2^2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{K}^3$$

Ainsi, j est un morphisme injectif entre $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension, donc il est bijectif. Ceci montre que

L'application j est un isomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

II.C Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Montrons que (i) $\implies$ (ii), puis (ii) $\implies$ (iii) et enfin (iii) $\implies$ (i).

- Supposons (i), c'est-à-dire que A est nilpotente. Il existe alors $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0$; en particulier, A n'est pas inversible si bien que $0 \in \text{sp}(A)$. Réciproquement, soit $\lambda \in \text{sp}(A)$ et $x \in \mathbb{K}^2$ un vecteur propre associé. Il en découle que $Ax = \lambda x$ d'où

$$A^r x = \lambda^r x = 0$$

Comme $x \neq 0$, il vient $\lambda^r = 0$ soit $\lambda = 0$. De ce fait, $\text{sp}(A) = \{0\}$, soit (ii).

- Supposons (ii), c'est-à-dire que $\text{sp}(A) = \{0\}$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A ; son polynôme caractéristique étant de degré 2 et admettant une racine puisque $\text{sp}(A) \neq \emptyset$, il est scindé sur $\mathbb{K}$. En conséquence, f est trigonalisable et, dans une base adaptée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, il admet pour matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $x \neq 0$ car $A \neq 0$ implique $f \neq 0$. Ainsi,

$$f(xe_1) = x f(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad f(e_2) = xe_1$$

donc dans la base $\mathcal{B}' = \{xe_1, e_2\}$, l'endomorphisme f admet pour matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X_0$$

ce qui prouve que la matrice A est semblable à X_0 , soit (iii).

- Supposons (iii), c'est-à-dire que A est semblable à X_0 : il existe $P \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1} X_0 P$. Il s'ensuit que

$$A^2 = P^{-1} X_0^2 P = P^{-1} \cdot 0 \cdot P = 0$$

si bien que A est nilpotente, soit (i).

II.D.1 Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$.

- Si A et B sont semblables, alors il existe $P \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1} A P$. De ce fait, on peut écrire

$$B - X I_2 = P^{-1} A P - X P^{-1} I_2 P = P^{-1} (A - X I_2) P$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \det(B - X I_2) &= \det(P^{-1} (A - X I_2) P) \\ &= \det(P) \det(A - X I_2) \det(P^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \det(B - X I_2) = \det(A - X I_2)$$

si bien que les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique.

- Réciproquement, supposons que A et B ont le même polynôme caractéristique χ , qui est de degré 2. Le corps de base étant $\mathbb{C}$, le polynôme χ est scindé. De plus, A et B sont de trace nulle donc la somme des racines de χ est nulle.
 - Premier cas: χ possède deux racines simples λ et $-\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dans ce cas, les matrices A et B sont diagonalisables et toutes deux semblables à la matrice λH_0 , d'où A et B sont semblables par transitivité.

- Second cas : χ possède une racine double, qui est nécessairement 0 puisque la somme de ses racines est nulle. Dans ce cas,

$$\text{sp}(A) = \text{sp}(B) = \{0\} \quad A \neq 0 \quad B \neq 0$$

donc, d'après la question II.C, les matrices A et B sont toutes deux semblables à X_0 , si bien que A et B sont semblables.

Finalement,

Deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ si, et seulement si, elles possèdent le même polynôme caractéristique.

II.D.2 La tournure de cette question incite à chercher un contre-exemple. Le plus simple est de prendre des matrices nilpotentes. En l'occurrence, définissons les matrices carrées d'ordre 3

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, pour $n > 3$, considérons les matrices de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{C})$ définies par blocs

$$A_n = \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} B_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $n \geq 3$. Les matrices A_n et B_n ont bien le même polynôme caractéristique $(-1)^n X^n$. Cependant, un calcul rapide montre que $A_n^2 = 0$ et $B_n^2 = A_n$. Ainsi, les matrices A_n et B_n ne peuvent pas représenter le même endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dans des bases différentes car $A_n \neq 0$, ce qui prouve que A_n et B_n ne sont pas semblables. Par conséquent,

Le résultat précédent devient faux pour deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{C})$ avec $n \geq 3$.

II.E.1.a Dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de la matrice A

$$\chi_A = X^2 + r^2 = (X + ir)(X - ir)$$

est scindé à racines simples car $r \neq 0$. A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$: il existe une matrice complexe P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & -ir \end{pmatrix} P^{-1} = ir P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = ir P H_0 P^{-1}$$

soit

$$P^{-1} A P = ir P^{-1} P H_0 P^{-1} P = ir H_0$$

Ainsi,

Il existe une matrice $P \in GL(2, \mathbb{C})$ telle que $ir H_0 = P^{-1} A P$.

Comme $A = ir P H_0 P^{-1}$ et $H_0^2 = I_2$, il vient

$$A^2 = -r^2 P H_0^2 P^{-1} = -r^2 P I_2 P^{-1} = -r^2 I_2$$

d'où

$$A^2 + r^2 I_2 = 0$$

II.E.1.b Raisonnons par l'absurde : supposons la famille $(1/r f(\omega), \omega)$ liée. Comme w n'est pas nul, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $1/r f(\omega) = \lambda \omega$ soit $f(\omega) = \lambda r \omega$, d'où

$$f^2(\omega) = f(\lambda r \omega) = \lambda r f(\omega) = \lambda^2 r^2 \omega$$

Or,

$$f^2(\omega) = f(f(\omega)) = A(A\omega) = A^2 \omega = -r^2 \omega$$

car $A^2 = -r^2 I_2$ d'après la question précédente, de sorte que

$$\lambda^2 r^2 \omega = -r^2 \omega \quad \text{soit} \quad (\lambda^2 + 1) r^2 \omega = 0$$

Comme $\omega \neq 0$ et $r \neq 0$, il en découle que $\lambda^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette contradiction montre que $(1/r f(\omega), \omega)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$; son cardinal étant égal à la dimension de cet espace, c'est une base de cet espace.

$$\text{La famille } \mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{r} f(\omega), \omega \right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.$$

Pour déterminer la matrice de f dans cette base, déterminons les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}_1$: on a

$$f\left(\frac{1}{r} f(\omega)\right) = \frac{1}{r} f^2(\omega) = \frac{1}{r} (-r^2 \omega) = -r \omega \quad \text{et} \quad f(\omega) = r \left(\frac{1}{r} f(\omega)\right)$$

d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} = r J_0$$

II.E.2 Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$.

- On montre comme dans la question II.D.1 que si A et B sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique.
- Réciproquement, supposons que A et B ont le même polynôme caractéristique χ , qui est de degré 2. On a alors

$$\chi = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det A = X^2 + \det A = X^2 + \det B$$

car $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$. Trois cas se présentent.

- Premier cas : $\det A = \det B = -r^2$ avec $r \in \mathbb{R}^*$; alors χ possède deux racines simples r et $-r$. Comme dans la question II.D.1, les matrices A et B sont toutes deux semblables à la matrice $r H_0$, donc elles sont semblables.
- Deuxième cas : $\det A = \det B = 0$. On a encore

$$\text{sp}(A) = \text{sp}(B) = \{0\} \quad A \neq 0 \quad B \neq 0$$

donc d'après la question II.C, les matrices A et B sont toutes deux semblables à X_0 donc elles sont semblables.

- Troisième cas : $\det A = \det B = r^2$ avec $r \in \mathbb{R}^*$. D'après la question II.E.1.b, A et B sont toutes deux semblables à $r J_0$ donc elles sont semblables.

Finalement,

Deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ si, et seulement si, elles possèdent le même polynôme caractéristique.

Notons que le résultat de la question II.E.1.a ne peut pas être utilisé ici, car il prouve seulement que des matrices sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Enfin, rappelons que de manière générale, deux matrices sont semblables dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans des bases différentes.

II.F.1 Comme $M \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ est de trace nulle, elle est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = -a^2 - bc = -(a^2 + bc)$$

et
$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$$

si bien que
$$\boxed{\text{Tr}(M^2) = 2(a^2 + bc) = -2 \det M}$$

II.F.2 Envisageons deux cas pour $M \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

- Si $M = 0$, alors M est nilpotente et $\text{Tr}(M^2) = 0$.
- Si $M \neq 0$, on déduit de la question II.C que M est nilpotente si et seulement si M et X_0 sont semblables. D'après les questions II.D.1 et II.E.2, ces matrices sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$ si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique $\chi_{X_0} = X^2$. Or

$$\begin{aligned} \chi_M = \chi_{X_0} &\iff X^2 - \text{Tr}(M)X + \det M = X^2 \\ &\iff \det M = 0 \wedge \text{Tr} M = 0 \\ &\iff \det M = 0 && \text{puisque } M \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) \\ &\iff -2 \det M = 0 \\ \chi_M = \chi_{X_0} &\iff \text{Tr}(M^2) = 0 && \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que M est nilpotente si et seulement si $\text{Tr}(M^2) = 0$.

On a démontré que, dans tous les cas de figure,

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est nilpotente si et seulement si } \text{Tr}(M^2) = 0.}$$

II.F.3 On sait que les matrices A et $[A, B] = AB - BA$ commutent, c'est-à-dire que

$$A(AB - BA) = (AB - BA)A \quad (1)$$

Comme
$$\begin{aligned} [A, B]^2 &= (AB - BA)(AB - BA) \\ &= AB(AB - BA) - BA(AB - BA) \\ &= AB(AB - BA) - B(AB - BA)A && \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

soit
$$[A, B]^2 = ABAB - AB^2A - BABA + B^2A^2$$

d'où
$$\text{Tr}([A, B]^2) = \underbrace{\text{Tr}(ABAB) - \text{Tr}(BABA)}_{=0} + \underbrace{\text{Tr}(B^2A^2) - \text{Tr}(AB^2A)}_{=0} = 0$$

par propriété de la trace. On déduit alors de la question précédente que $[A, B]$ est nilpotente. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } [A, B] = AB - BA \text{ commutent, alors } [A, B] \text{ est nilpotente.}}$$

II.G.1 Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{K})$, on a

$$MX_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

et
$$X_0M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc
$$MX_0 = X_0M \iff (c = 0 \text{ et } a = d)$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathcal{M}(2, \mathbb{K}) \text{ commutant avec la matrice } X_0 \text{ est } \text{Comm}(X_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si l'on se restreint aux matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$, on obtient

$$M X_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 M = \begin{pmatrix} c & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $M X_0 = X_0 M \iff a = c = 0$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ commutant avec la matrice X_0 est $\text{Comm}_0(X_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} X_0$.

On arrive bien évidemment au même résultat en notant que $\text{Comm}_0(X_0)$ est l'ensemble des matrices de $\text{Comm}(X_0)$ de trace nulle.

II.G.2 Notons d'abord que pour tous $A, B \in \mathcal{M}(2, \mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} [P A P^{-1}, P B P^{-1}] &= P A P^{-1} P B P^{-1} - P B P^{-1} P A P^{-1} \\ &= P A B P^{-1} - P B A P^{-1} \\ &= P (A B - B A) P^{-1} \end{aligned}$$

d'où $[P A P^{-1}, P B P^{-1}] = P [A, B] P^{-1}$ (2)

Utilisons ceci pour montrer que $(P X_0 P^{-1}, P H_0 P^{-1}, P Y_0 P^{-1})$ est un triplet admissible pour tout $P \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$. Fixons donc $P \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$: tout d'abord, les matrices X_0, H_0 et Y_0 étant non nulles, il en va de même pour les matrices $P X_0 P^{-1}, P H_0 P^{-1}$ et $P Y_0 P^{-1}$. De plus,

$$\begin{aligned} [H_0, X_0] &= H_0 X_0 - X_0 H_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit $[H_0, X_0] = 2X_0$

si bien que $[P H_0 P^{-1}, P X_0 P^{-1}] = P [H_0, X_0] P^{-1} = 2 P X_0 P^{-1}$ d'après (2)

De même,

$$\begin{aligned} [X_0, Y_0] &= X_0 Y_0 - Y_0 X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit $[X_0, Y_0] = H_0$

d'où $[P X_0 P^{-1}, P Y_0 P^{-1}] = P [X_0, Y_0] P^{-1} = P H_0 P^{-1}$ d'après (2)

$$\begin{aligned}
\text{Enfin,} \quad [H_0, Y_0] &= H_0 Y_0 - Y_0 H_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad [H_0, Y_0] = -2Y_0$$

$$\text{puis} \quad [P H_0 P^{-1}, P Y_0 P^{-1}] = P [H_0, Y_0] P^{-1} = -2 P Y_0 P^{-1} \quad \text{d'après (2)}$$

On a ainsi vérifié que

Le triplet $(P X_0 P^{-1}, P H_0 P^{-1}, P Y_0 P^{-1})$ est un triplet admissible pour tout $P \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$.

II.G.3 Le triplet (X, H, Y) étant admissible, $[H, X] = 2X$. De ce fait, la matrice $[X, H] = -2X$ commute avec X . On déduit alors de la question II.F.3 que $[X, H]$, donc X , est nilpotente. D'après la question II.C, X est alors semblable à X_0 d'où

Il existe $Q \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$ tel que $X = Q X_0 Q^{-1}$.

II.G.4.a Le triplet (X, H, Y) étant admissible, on a

$$\begin{aligned}
[H, X] &= HX - XH = 2X \\
\text{donc} \quad XH &= HX - 2X \\
\text{d'où} \quad XHu &= HXu - 2Xu = 0 \\
\text{car} \quad Xu &= Q X_0 Q^{-1}u = Q X_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
\text{de sorte que} \quad Hu &\in \text{Ker } X
\end{aligned}$$

Or, X est de rang 1 car semblable à la matrice X_0 de rang 1. On déduit du théorème du rang que $\text{Ker } X$ est de dimension 1. Comme cet espace vectoriel contient le vecteur non nul u ,

$$\text{Ker } X = \mathbb{K}u \text{ est la droite vectorielle engendrée par } u.$$

Par conséquent, $Hu \in \mathbb{K}u$, ce qui signifie que

u est un vecteur propre de H .

II.G.4.b Puisque u est un vecteur propre de H ,

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad Hu = \lambda u$$

On a vu précédemment que $XH = HX - 2X$ d'où

$$X H v = H X v - 2 X v = H u - 2 u = (\lambda - 2) u$$

$$\text{car} \quad X v = Q X_0 Q^{-1} v = Q X_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

Par définition, les vecteurs u et v sont les images par $Q \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^2$: de ce fait, la famille (u, v) est une base de $\mathbb{K}^2$, donc

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad H v = \alpha u + \beta v$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} X H v &= \alpha X u + \beta X v \\ \text{soit} \quad (\lambda - 2) u &= 0 + \beta u \\ \text{et} \quad \beta &= \lambda - 2 \end{aligned} \quad \text{comme } u \neq 0$$

On a ainsi prouvé l'existence de λ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que

$$H u = \lambda u \quad \text{et} \quad H v = \alpha u + (\lambda - 2) v$$

$$\text{soit} \quad H Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\lambda - 2) Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad Q^{-1} H Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} H Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\lambda - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Connaissant ainsi les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^2$ par la matrice $Q^{-1} H Q$, on en déduit que celle-ci s'écrit

$$Q^{-1} H Q = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or} \quad \text{Tr} (Q^{-1} H Q) = \text{Tr} H = 0$$

d'où $2\lambda - 2 = 0$, soit $\lambda = 1$. De ce fait, on a $Q^{-1} H Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par conséquent,

Il existe $t \in \mathbb{K}$ tel que $H = Q \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

II.G.4.c Soit $T \in \text{GL}(2, \mathbb{K})$ commutant avec X_0 : d'après la question II.G.1, elle est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ et $b \in \mathbb{K}$. De plus,

$$\begin{aligned} H &= Q T H_0 (Q T)^{-1} \iff Q \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q T H_0 T^{-1} Q^{-1} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T H_0 T^{-1} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2b/a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ H &= Q T H_0 (Q T)^{-1} \iff t = -\frac{2b}{a} \end{aligned}$$

Il suffit par exemple de prendre $a = 2$ et $b = -t$ pour satisfaire cette relation. Ainsi,

La matrice inversible $T = \begin{pmatrix} 2 & -t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ commute avec X_0 et vérifie la relation $H = Q T H_0 (Q T)^{-1}$.

II.G.5.a Soit $M \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

$$\text{Tr} (Q^{-1} M Q) = \text{Tr} M = 0$$

donc $Q^{-1} M Q \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ et

$$\begin{aligned}
MX = XM &\iff M Q X_0 Q^{-1} = Q X_0 Q^{-1} M \quad (\text{cf. question II.G.3}) \\
&\iff (Q^{-1} M Q) X_0 = X_0 (Q^{-1} M Q) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, Q^{-1} M Q = \lambda X_0 \quad (\text{cf. question II.G.1}) \\
MX = XM &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, M = \lambda Q X_0 Q^{-1} = \lambda X
\end{aligned}$$

Par conséquent,

Les matrices de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X sont les multiples de X .

II.G.5.b Les triplets (X, H, Y) et (X, H, Y') étant admissibles, on a

$$\Phi_X(Y - Y') = [X, Y - Y'] = [X, Y] - [X, Y'] = H - H$$

soit

$$\Phi_X(Y - Y') = 0$$

et

$$\Phi_H(Y - Y') = [H, Y - Y'] = [H, Y] - [H, Y'] = -2Y + 2Y'$$

soit

$$\Phi_H(Y - Y') = -2(Y - Y')$$

II.G.5.c Utilisons les résultats de deux questions qui précèdent, en notant que, comme Y et Y' appartiennent à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$, il en va de même pour $Y - Y'$.

- On sait que $\Phi_X(Y - Y') = 0$, ce qui signifie que $Y - Y'$ commute avec X . D'après la question II.G.5.a, ceci implique que $Y - Y'$ est un multiple de X : ainsi,

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad Y - Y' = \lambda X$$

- On déduit alors de la question II.G.5.b que

$$\begin{aligned}
\Phi_H(Y - Y') = -2(Y - Y') &\iff [H, \lambda X] = -2\lambda X \\
&\iff \lambda [H, X] = 2\lambda X = -2\lambda X \\
\Phi_H(Y - Y') = -2(Y - Y') &\iff \lambda = 0 \quad \text{car } X \neq 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $Y - Y' = 0$, soit

$$Y = Y'$$

II.G.6 Comme $P = QT \in GL(2, \mathbb{K})$, on a d'après la question II.G.4.c

$$P H_0 P^{-1} = Q T H_0 (QT)^{-1} = H$$

Par ailleurs, T commute avec X_0 et l'on déduit de la question II.G.3 que

$$P X_0 P^{-1} = Q T X_0 T^{-1} Q^{-1} = Q X_0 Q^{-1} = X$$

Ainsi, le triplet $(X, H, P Y_0 P^{-1}) = (P X_0 P^{-1}, P H_0 P^{-1}, P Y_0 P^{-1})$ est admissible d'après la question II.G.2. De plus, $Y_0 \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ donc $P Y_0 P^{-1} \in \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Or, le triplet (X, H, Y) est admissible : il découle alors de la question précédente que $Y = P Y_0 P^{-1}$. Au final, on a montré que

$$\exists P \in GL(2, \mathbb{K}) \quad (P X_0 P^{-1}, P H_0 P^{-1}, P Y_0 P^{-1}) = (X, H, Y)$$

On vient ainsi d'obtenir une description complète de tous les triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.