

1 Éléments propres

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque (et donc pas nécessairement de dimension finie.)

Définition 1

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On appelle alors :

- vecteur propre associé à la valeur propre λ tout vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$
- espace propre associé à λ l'ensemble

$$E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda I_d)$$

Enfin, on appelle équation aux éléments propres l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnues λ et $x \neq 0$.

Remarque 1

- En d'autres termes, un scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda I_d$ a un noyau non réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $u - \lambda I_d$ n'est pas injectif.
- Attention, le vecteur nul n'est jamais vecteur propre par définition bien que $u(0) = \lambda 0$ pour tout λ . En revanche, il appartient à tous les espaces propres.

Exemple 1

- Si u est l'homothétie de rapport λ , alors pour tout $x \neq 0$, x est vecteur propre associé à λ . Réciproquement, si u admet tout vecteur non nul pour valeur propre, on peut montrer (exercice classique) que u est une homothétie.
- Notons $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme $f \mapsto f'$ de E . Alors, tout scalaire λ est valeur propre de D avec pour sous espace propre associé

$$E_\lambda(D) = \text{Vect} \{t \mapsto \exp(\lambda t)\}$$

- Notons $E = \mathbb{K}[X]$ et u l'endomorphisme $P \mapsto XP$ de E . Alors P n'admet aucune valeurs propres.
- Les seules valeurs propres possibles d'un projecteur (resp. d'une symétrie) sont $\{0, 1\}$ (resp. $\{-1, 1\}$).

Proposition 1

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et D une droite vectorielle. Alors, D est stable par u si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de u .

Définition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- Un scalaire λ est valeur propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.
- Un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul est vecteur propre de A pour la valeur propre λ si $AX = \lambda X$.
- Si λ est une valeur propre de A , le sous-espace propre de A est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $AX = \lambda X$. On le note $E_\lambda(A)$. On remarquera à nouveau que

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Remarque 2

- 0 est valeur propre si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = 0$, c'est-à-dire si $\text{Ker } u \neq \{0\}$, soit encore u non injectif. Dans ce cas, $E_0(u) = \text{Ker } u$.
- Si x est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \text{Im } u$. Par suite,

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ valeurs propres non nulles, } \sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) \subset \text{Im } u$$

- On s'autorise à utiliser la notation $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda I_d)$ (resp. $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$) pour n'importe quel scalaire λ . Dans ce cas, λ est valeur propre de u (resp. A) si et seulement si $E_\lambda(u)$ (resp. $E_\lambda(A)$) n'est pas réduit à 0.

Proposition 2

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Proposition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.
- Toute famille de p vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Remarque 3

En particulier, on en déduit que la famille $(t \mapsto e^{\lambda t})_{\lambda \in \mathbb{K}}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(R, \mathbb{K})$, de même que $((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})_{\lambda \in \mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour toute valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
- Si x est valeur propre de u pour la valeur propre λ , alors il est vecteur propre de $P(u)$ pour $P(\lambda)$.

Proposition 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u . Alors toute valeur propre de u est racine de P .

Remarque 4

Toutes les racines d'un polynôme annulateur P ne sont pas nécessairement valeurs propres de u . Toutefois, si λ est racine de P et n'est pas valeur propre de u , on peut écrire

$$P = (X - \lambda)^k Q(u) \quad \text{d'où} \quad P(u) = 0 = (u - \lambda I_d)^k \circ Q(u)$$

où k est la multiplicité de λ comme racine de P et donc λ non racine de Q . Mais puisque λ n'est pas valeur propre, $(u - \lambda I_d)$ est bijectif, d'où $Q(u) = 0$. En répétant l'opération, on assure l'existence d'un polynôme annulateur dont les racines sont exactement les valeurs propres de u . Ce résultat est également une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton (à venir).

Définition 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u et on le note $\text{Sp } u$.

On définit de même le spectre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on note $\text{Sp } A$.

Remarque 5

En dimension infinie, il faut distinguer la notion de valeur propre et de valeur spectrale. Une valeur spectrale est définie pour un endomorphisme u continu comme un scalaire λ tel que $u - \lambda I_d$ n'ait pas d'inverse continu. Dans tous les cas, le spectre d'un endomorphisme continu est l'ensemble de ses valeurs spectrales.

En dimension finie, tous les endomorphismes sont continus, et on a l'équivalence « u injectif » et « u bijectif ». Par conséquent, les deux notions coïncident.

2 Polynôme caractéristique

2.1 Définitions, exemples

Dans toute la suite, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E .

Proposition 6

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence de

- (i) λ est une valeur propre de u .
- (ii) $\text{Ker}(u - \lambda I_d) \neq \{0\}$.
- (iii) $\det(u - \lambda I_d) = 0$.

Lemme 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(A - xB)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal au rang de B .

Proposition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(A - xI_n)$ est polynomiale de degré n et si l'on note $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \det(A - xI_n) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

alors $a_n = (-1)^n$ $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr } A$ et $a_0 = \det A$

Définition 4

On appelle polynôme caractéristique de A l'unique élément χ_A de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = (-1)^n \det(A - xI_n)$$

Exemple 2

- Matrice triangulaire supérieure/inférieure, diagonale.

- Matrice circulante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice compagnon

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarque 6

L'application

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{U}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto \chi_A \end{aligned}$$

est par conséquent surjective (clairement non injective, et surtout pas linéaire) avec $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des polynôme de degré n et unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 8

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique. En particulier, il y en a au plus n distinctes.

Exemple 3

- Matrice triangulaire supérieure/inférieure, diagonale.
- Matrice circulante.
- Rotation d'angle $\pi/2$ de $\mathbb{R}^2$ (cas complexe et réel).

Remarque 7

L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 9

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même spectre. Il en est de même de toute matrice et de sa transposée.

Définition 5

On définit le polynôme caractéristique de u par celui de sa matrice dans une base arbitraire de E .

Proposition 10

Comme pour les matrices, les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarque 8

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme :

- Pour une matrice, on privilégie le calcul du polynôme caractéristique. Même dans les cas les plus simples, on essaiera dans la mesure du possible d'en conserver une expression factorisée (à l'aide d'opérations élémentaires mettant en apparence un facteur commun dans toute une ligne/colonne).
- Pour les endomorphismes, on peut calculer le polynôme caractéristique d'une de ses matrices dans une base bien choisie. Mais on peut aussi (et assez souvent) se contenter de résoudre l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda \cdot x$ où λ est un scalaire et x un vecteur non nul (on fait alors naturellement apparaître des conditions sur λ pour l'existence d'un tel x non nul).

Exemple 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 11

Pour tout scalaire λ , on peut écrire

$$\chi_u(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} \operatorname{Tr} u + \cdots + (-1)^n \det u$$

Théorème 1 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Le polynôme caractéristique χ_u annule u (resp. χ_A annule A).

2.2 Valeurs propres et multiplicités

Proposition 12

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de tout élément u de $\mathcal{L}(E)$ (resp. de tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est scindé. En particulier, u (resp. A) a au moins une valeur propre.

Exemple 5

Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotent, alors $\chi_A = X^n$.

Définition 6

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre $\lambda \in \text{Sp } u$ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u . On définit de même la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice.

Proposition 13

Si E est de dimension finie n (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), alors $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. A) a au plus n valeurs propres distinctes et la somme des ordres des multiplicités des racines est inférieure ou égale à n , avec égalité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque 9

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on utilise principalement deux notations pour le spectre d'une matrice A ou d'un endomorphisme u :

- $\text{Sp}(A/u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ avec $p \leq n$ où les (λ_i) sont supposées deux à deux distinctes, de multiplicités alors notées $\mu_1, \dots, \mu_p$;
- $\text{Sp}(A/u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ avec répétition éventuelle des valeurs propres de multiplicité supérieure à 1.

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. A) de polynôme caractéristique χ_u (resp. χ_A) scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$, alors

$$\text{Tr } u = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^n x_i$$

Proposition 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre de même ordre. De plus, si X est vecteur propre de A pour λ , alors $\bar{X}$ l'est pour $\bar{\lambda}$. En particulier, les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres ont même dimension.

Proposition 16

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. Si on note u_1 l'endomorphisme de F induit par u , alors χ_{u_1} divise χ_u .

Corollaire 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La dimension d'un sous-espace propre de u est au plus égale à l'ordre de la valeur propre correspondante.

Corollaire 2

Un sous-espace propre associé à une valeur propre simple du polynôme caractéristique est de dimension 1.

Exemple 6

- Quelques matrices triangulaires supérieures, dont la matrice nilpotente d'ordre n .
- Matrice circulante.

3 Diagonalisation en dimension finie

3.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 7

Un endomorphisme u est dit diagonalisable si E est la somme directe des sous-espaces propres de u .
Une matrice A est diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé l'est.

Exemple 7

- Matrice circulante
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en tant qu'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$).
- Matrice n'ayant qu'une seule valeur propre, notamment le cas particulier triangulaire supérieure.

Proposition 17

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence de

- (i) u est diagonalisable.
- (ii) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u , c'est-à-dire que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
- (iii) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de u , alors

$$\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(u)$$

Corollaire 3

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Exemple 8

Vérifier que la matrice suivante est diagonalisable est déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -6 \\ -4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Corollaire 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes, c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Alors chaque sous-espace propre est de dimension 1 et u est diagonalisable.

Théorème 2

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. $\forall \lambda \in \text{Sp } u$, la dimension de $E_{\lambda}(u)$ est égale à l'ordre de cette valeur propre.

Exercice 1

Déterminer une CNS sur $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$ pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.2 Application aux calculs de puissances

Proposition 18 (Méthode de calcul de A^n)

On suppose $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable et on cherche à calculer A^n pour tout entier n .

- On cherche $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale.
- Alors, $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier n , où D^n est triviale à calculer.

Remarque 10

- Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable, on verra (exemple 12) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad A = P \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable, elle admet soit une valeur propre λ de multiplicité 2 et une autre μ de multiplicité 1, soit une valeur propre λ de multiplicité 3. Suivant les cas de figure, on peut justifier que A est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Les puissances se calculent alors immédiatement par récurrence.

Applications aux suites récurrentes

Exemple 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels qu'il existe quatre complexes a, b, c, d tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$$

On cherche une expression de u_n et v_n pour tout entier n . En notant $X_n = {}^t(u_n, v_n)$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il vient pour tout entier n ,

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{d'où} \quad X_n = A^n X_0$$

On est donc ramené à calculer A^n . Le problème se généralise à un nombre quelconque de suites.

Exemple 10

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant une récurrence linéaire d'ordre p de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}$$

En posant $X_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$, on a cette fois

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{p-1} & \end{pmatrix} X_n$$

Le calcul de u_n se ramène donc à nouveau à un calcul de puissance de matrice.

Remarque 11

Il est inutile de calculer A^n quand A est diagonalisable. En effet, il suffit de

- déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de la matrice, et une base $(U_1, \dots, U_p)$ de vecteurs propres associés.
- déterminer les coordonnées $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ de X_0 dans la base $(U_1, \dots, U_p)$.
- On en déduit aussitôt que pour tout entier p ,

$$X_n = A^n X_0 = \alpha_1 \lambda_1^n U_1 + \dots + \alpha_p \lambda_p^n U_p$$

Exercice 2

On considère un dé classique à 6 faces. Un déplacement élémentaire consiste à se déplacer d'un sommet du dé à un autre en suivant l'une des arêtes. Pour tous couples (A, B) de sommets du dé, déterminer le nombre de façons de se déplacer de A vers B en n déplacements élémentaires.

4 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Théorème 3

Un endomorphisme u de E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

Corollaire 5

Soit u un endomorphisme de E de dimension finie dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors u est diagonalisable si et seulement si il est annulé par $\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$.

Exercice 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\begin{aligned} \varphi_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto v \circ u \end{aligned}$$

Montrer que φ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Corollaire 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Alors quel que soit le sous-espace vectoriel F stable par u , l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

Corollaire 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E s'écrit comme une somme directe $\oplus_{k=1}^p E_k$ où chaque E_i est un sous-espace vectoriel stable par u . Alors u est diagonalisable si et seulement si chacun des endomorphismes induits par u sur les $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ est diagonalisable.

Remarque 12

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Alors un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si il est engendré par une famille de vecteurs propres de u .

5 Trigonalisation

Définition 8

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

Un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dit trigonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé à A l'est, ce qui revient à dire qu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 13

On peut remplacer triangulaire supérieure par inférieure dans la définition sans changer la notion.

Théorème 4

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. En particulier, tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Exemple 11

Réduction des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Corollaire 8

Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres **complexes** pas nécessairement distinctes, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr } A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

Remarque 14

Ces égalités permettent de déterminer les valeurs propres manquantes lorsqu'on en connaît $n - 2$ ou $n - 1$ (typiquement les matrices de rang 1 ou 2 pour lesquelles on sait déjà que 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 2$).

Exercice 4

La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Justifier que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que le résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6 Complément : diagonalisation simultanée, commutant

Exercice 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

- v et u commutent si et seulement si les sous-espaces propres de u sont stables par v .
- Si v commute avec u et si v est diagonalisable, alors il existe une base commune de vecteurs propres pour u et v .

Remarque 15

De la même manière, si u et v sont deux endomorphismes trigonalisables et qui commutent, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient toutes deux triangulaires supérieures.