

1 Produit d'espaces vectoriels, sommes de sous-espaces vectoriels

Rappels sur les bases

Dans tous ces rappels, E est un espace vectoriel de dimension finie n . Par ailleurs, la lettre $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$ (les résultats sont valables dans les deux cas).

- Toute famille libre (resp. génératrice) de n vecteurs de E est une base de E .
- Toute famille de cardinal supérieur ou égal à $n + 1$ est liée.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E et $\mathcal{F}$ une famille génératrice quelconque, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ dans $\mathcal{F}$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .
- Pour tous sevs F et G de E , on a la formule de Grassman :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$$

1.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On note $E \times F$ l'ensemble des couples d'éléments de E et F . Cet ensemble est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel en posant

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall y_1, y_2 \in F, \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et $\forall x \in E, \quad \forall y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Proposition 1

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie également et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

Remarque 1

La définition et la proposition précédente se généralisent immédiatement au produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels et notamment, si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$$

Exemple 1

Soit E un sous-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi: F \times G &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

Alors ϕ est linéaire, $\text{Im } \phi = F + G$ et $\text{Ker } \phi$ est isomorphe à $F \cap G$ ce qui permet de retrouver la formule de Grassman lorsque F et G sont de dimension finie.

1.2 Sommes de sous-espaces vectoriels

Rappels sur les supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels F, G sont dits supplémentaires dans E s'ils vérifient au choix :

- (i) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$
- (ii) Tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- (iii) Lorsque E est de dimension finie, $\dim E = \dim F + \dim G$ puis au choix, $E = F + G$ ou $F \cap G = \{0\}$

Exemple 2

Les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- L'ensemble des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Un hyperplan H et $\text{Vect}\{a\}$ où a n'est pas un élément de H .
Par exemple, l'ensemble des matrices de trace nulle et $\text{Vect}\{I_n\}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. En notant $P \cdot \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes multiples de P , et comme de coutume $\mathbb{K}_n[X]$ les polynômes de degré au plus n , alors

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \bigoplus P \cdot \mathbb{K}[X]$$

Exercice 1 (Mines 2014)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E vérifiant

$$p + q = I_d \quad \text{et} \quad \text{rg } p + \text{rg } q \leq \dim E$$

Montrer que p et q sont deux projecteurs.

Définition 2

Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de $E_1, \dots, E_p$ l'ensemble

$$F = \{x_1 + \dots + x_p, (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E noté $E_1 + \dots + E_p$ ou encore $\sum_{k=1}^p E_k$.

La somme F est dite directe si l'écriture de tout élément x de F comme somme de p éléments de respectivement $E_1, \dots, E_p$ est unique. On note alors $F = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

Proposition 2

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E de somme F , on a équivalence des trois propriétés suivantes :

- (i) $F = \bigoplus_{k=1}^p E_k$
- (ii) $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$
- (iii) $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$

Exemple 3

Dans E de dimension n , on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque puis $F_i = \text{Vect}\{e_i\}$ pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Tout élément x de E peut s'écrire de manière unique

$$x = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1}}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{\lambda_{i+1} e_{i+1} + \dots + \lambda_n e_n}_{\in F_n}$$

Par suite, $E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.

Proposition 3

Soit $\mathcal{B}$ une base de E qui est la réunion de p familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$. Si l'on note E_i le sous-espace engendré par $\mathcal{B}_i$, alors $E = E_1 \bigoplus \dots \bigoplus E_p$.

Exercice 2

On conserve les notations de l'exemple précédent et on note :

$$G_i = \text{Vect}(e_k)_{k \neq i} \quad \text{et} \quad H_i = \{f \in \mathcal{L}(E), G_i \subset \text{Ker } f\}$$

Montrer que la somme $\sum_{i=1}^n H_i$ est directe.

Remarque 2

Attention !!!!! Pour montrer que $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, il ne suffit pas de montrer

- $F = E_1 + \cdots + E_p$
- $\forall i \neq j, \quad E_i \cap E_j = \{0\}$

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on pose

$$F_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad F_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et enfin} \quad F_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2 + F_3$ mais la somme n'est pas directe bien que les intersections deux à deux soient systématiquement réduites à 0.

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel tel que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$. Si pour tout $1 \leq i \leq p$, on dispose d'une base $\mathcal{B}_i$ de E_i , alors la réunion $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ de ces bases est une base de E , dite adaptée à la somme directe.

Proposition 5

Si E est de dimension finie et si $E_1, \dots, E_p$ sont p sevs de E alors

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim E_k$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

2 Trace

Rappels sur les changements de bases

- Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finies n et p , munis de deux bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$, et si u est une application linéaire de E dans F , la matrice de u respective aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est l'élément de $\mathcal{M}_{p,n}$ dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ dans $\mathcal{B}'$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad u(e_i) = \sum_{k=1}^p a_{k,i} f_k$$

La matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ entre deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un même espace vectoriel est par définition $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(I_d)$.

- « Réciproquement » pour tout élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice respectivement à la base canonique est A .
- Si G est un troisième espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}_3$, alors pour toute application linéaire $v : F \rightarrow G$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$$

En particulier, la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ a pour inverse la matrice $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

- Si $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}'_F$ sont deux nouvelles bases de E et F , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u) = P_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \cdot P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$$

- Deux matrices sont semblables si ce sont les matrices dans deux bases différentes d'un même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 4

- Endomorphisme nilpotent d'ordre n : construire la matrice réduite habituelle.
- Matrice circulante : calcul des puissances.

Exercice 3 (Matrices équivalentes ♡ ♡ ♡)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Justifier qu'il existe deux matrices P et Q inversibles telles que

$$A = PJ_rQ \quad \text{ou} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Mines, Centrale)

- Déterminer le cardinal maximal d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant uniquement des matrices de carré nul et ne contenant aucune matrices semblables et distinctes.
- A quelle condition sur i, j, k, l les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont elles semblables ?

Rappels sur le déterminant

Le déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui soit

- linéaire par rapport à chacun des vecteurs colonnes de la matrice ;
- alterné et antisymétrique par rapport aux colonnes ;
- qui envoie I_n sur 1.

De cette définition, il découle les propriétés suivantes du déterminant :

- formule de développement par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne (en particulier, le déterminant est une somme de produits de coefficients de la matrice) ;
- le déterminant est invariant par transposition ;
- le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants.
- le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Exemple 5

Les exemples suivants de calculs de déterminants sont classiques et à connaître absolument :

- Matrice de Jacobi
- Déterminants tri-diagonaux

Exercice 5 (Mines 2014)

Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes du polynôme $X^n - X - 1$ comptées avec multiplicités. Calculer le déterminant de la matrice dont les coefficients diagonaux valent $1 + z_1, 1 + z_2, \dots, 1 + z_n$ et tous les autres valent 1.

Exercice 6 (X 2014)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B) = 0$$

Montrer que pour tous réels x, y , on a $\det(xA + yB) = 0$.

Exercice 7 (Matrice pgcd)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers k dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $\text{pgcd}(k, n) = 1$.

- Montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.
- Notons H , T et Δ les matrices dont les coefficients sont donnés pour tout (i, j) par
 - $T_{i,j} = 1$ si i divise j et 0 sinon ;
 - $\Delta_{i,j} = \text{pgcd}(i, j)$;
 - Enfin, $H_{i,j} = \varphi(i)$ si $i = j$ et $H_{i,j} = 0$ sinon.

Calculer tTHT et en déduire le déterminant de Δ .

Définition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A et on note $\text{Tr } A$ le scalaire défini par

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$$

Proposition 6

La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ satisfaisant pour toutes matrices A et B

$$\text{Tr } (A^T) = \text{Tr } A \quad \text{et} \quad \text{Tr } (AB) = \text{Tr } (BA)$$

Corollaire 1

Deux matrices semblables ont mêmes traces (et mêmes déterminants).

Définition 4

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On appelle trace de f la trace de sa matrice dans une base quelconque de E .

Proposition 7

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 8

Soient $p_1, \dots, p_k$ une famille de projecteurs sur un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $p_1 + \dots + p_k = I_d$. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Im } p_i$ et que p_i est le projecteur sur $\text{Im } p_i$ parallèlement à la somme des images des $(p_j)_{j \neq i}$.

3 Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices par blocs

Proposition 8

Soient A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On décompose A et B sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

avec $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors, pour tout scalaire λ ,

$$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda A_1 + B_1 & \lambda A_2 + B_2 \\ \lambda A_3 + B_3 & \lambda A_4 + B_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}$$

Enfin, la matrice AB se décompose sous la forme

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

Corollaire 2

On suppose que $A_2 = A_3 = 0$ et que A_1 et A_4 sont inversibles. Alors, A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}$$

et de plus, avec les notations précédentes

$$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} A_1^{-1}B_1A_1 & \star \\ \star & A_4^{-1}B_4A_4 \end{pmatrix}$$

Remarque 3

Les résultats se généralisent avec une décomposition en un nombre quelconque de blocs, du moment que les tailles des matrices sont compatibles avec le produit matriciel.

Exercice 9 (Centrale 2014)

- Soit D une matrice diagonale de taille n dont les éléments diagonaux $d_1, \dots, d_n$ sont deux à deux distincts. On pose $\phi : M \mapsto MD - DM$. Déterminer le noyau et l'image de ϕ .
- Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = XY - YX$.

Proposition 9 (Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par bloc)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A admet une décomposition par blocs de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_4$$

Sous-espaces stables

Définition 5

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est dit stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$. Dans ce cas, on appelle endomorphisme induit par u sur F l'application

$$\begin{aligned} u_1 : F &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

Remarque 4

Attention à ne pas confondre l'endomorphisme induit, élément de $\mathcal{L}(F)$, et une restriction, élément de $\mathcal{L}(F, E)$ (qui peut être définie même si F n'est pas stable).

Exemple 6

- $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels stables de E (quel que soit u).
- $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel stable par l'endomorphisme $D : P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 10

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Proposition 11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F (c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F). Alors, F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme u_1 induit par u sur F respectivement à la base $\mathcal{B}'$.

Remarque 5

Avec les mêmes notations, le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est stable par u si et seulement si $B = 0$.

Proposition 12

Si E est de dimension finie et $(E_1, \dots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels tels que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$. Alors u laisse stable chaque E_i si et seulement si sa matrice dans une base adaptée à cette somme est diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}$$

avec pour tout $1 \leq i \leq p$, $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ où n_i est la dimension de E_i . Dans ce cas, la matrice A_i est celle de l'endomorphisme induit par u sur E_i .

Exercice 10 (Mines)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes u de E nilpotents et tels que tout sous-espace vectoriel stable par u admette un supplémentaire stable par u .

4 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

4.1 Généralités

Définition 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. On note $P(u)$ l'endomorphisme défini par

$$P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k = a_0 I_d + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_k u^k + \dots$$

la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant nulle à partir d'un certain rang. On définit de même $P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 6

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale (resp. triangulaire sup/inf), d'éléments diagonaux $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$, alors $P(A)$ est également diagonale (resp. triangulaire sup/inf), d'éléments diagonaux $P(a_{1,1}), \dots, P(a_{n,n})$.

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- L'application $P \mapsto P(u)$ est linéaire et l'image du polynôme 1 est I_d .
- Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$,
$$P(u) \circ Q(u) = (P \times Q)(u)$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $P \mapsto P(A)$ vérifie les mêmes propriétés.

Corollaire 3

Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et tout $u \in \mathcal{L}(E)$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. Il en est de même pour $P(A)$ et $Q(A)$ pour toute matrice A .

Remarque 7

Les propriétés précédentes signifie que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_u : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\longmapsto P(u) \end{aligned}$$

est ce qu'on appelle un morphisme d'algèbre.

Proposition 14

Soit $S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$P(S^{-1}AS) = S^{-1}P(A)S$$

Remarque 8

On rappelle au passage que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_S : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto S^{-1}AS \end{aligned}$$

est un automorphisme d'inverse $\varphi_{S^{-1}}$ et qui vérifie $\varphi_S(A) \cdot \varphi_S(B) = \varphi_S(AB)$ pour tous éléments A, B .

Proposition 15

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, les sous-espaces $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par u .

4.2 Polynômes annulateurs

Définition 7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$. On a une définition similaire pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 7

Projecteurs, symétries, homothétie, endomorphismes nilpotent.

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Remarque 9

La preuve précédente assure l'existence d'un polynôme annulateur pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) de degré au plus $(\dim E)^2$ (resp. n^2). Le théorème de Cayley Hamilton permettra de ramener ce majorant à $\dim E$ (resp. n).

4.3 Applications aux calcul de l'inverse et des puissances

Exercice 11

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur P de A de degré 2.
- En déduire sans calculs la matrice A^{-1} .
- Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P .
- En déduire l'expression de A^n pour tout entier n .

Remarque 10

La méthode se généralise de la manière suivante. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui est annulée par le polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$.

- Si $a_0 \neq 0$, alors A est inversible et
$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1}$$
- Pour tout entier n , si l'on note R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P , alors $A^n = R_n(A)$.

5 Interpolation de Lagrange

Rappels

- Toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Les familles suivantes forment des bases de $K_n[X]$:
 - $\{1, X - \alpha, \dots, (X - \alpha)^n\}$ où α est un scalaire quelconque ;
 - $\{P, P', P'', \dots, P^{(n)}\}$ où P est un polynôme quelconque de degré n ;

Définition 8 (Base de polynômes interpolateurs de Lagrange)

Soient $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose

$$P_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$$

Alors, la famille $\{P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ appelée base des polynômes interpolateurs de Lagrange en $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. De plus, pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^n P(\alpha_i) P_i$$

Remarque 11

Avec les notations de la définition précédente, on a

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

Exercice 12 (Application à la décomposition en éléments simple)

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes deux à deux distincts et P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Justifier l'existence et l'unicité de complexes $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$,

$$\frac{P(z)}{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)} = \frac{\beta_1}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{\beta_n}{z - \alpha_n}$$

En déduire une primitive de $x \mapsto x/(x^3 - 1)$ sur $]1; +\infty[$.

Définition 9 (Matrice de Vandermonde)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice de Vandermonde une matrice de la forme

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires quelconques.

Remarque 12

- Pour tous scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, la matrice V précédente est la matrice de l'application linéaire

$$\begin{aligned} u : \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

respectivement aux bases canoniques de ces espaces.

- Si P est un polynôme de degré d scindé à racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et que l'on note $R_n = \sum_{k=0}^{d-1} r_{n,k} X^k$ le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par P , alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{d-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \cdots & \alpha_d^{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n,0} \\ r_{n,1} \\ \vdots \\ r_{n,d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \vdots \\ \alpha_d^n \end{pmatrix}$$

Proposition 17 (Déterminant de Vandermonde)

Avec les notations précédentes,

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

En particulier, V est inversible si et seulement si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.

Remarque 13

Lorsque $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le i -ième vecteur colonne de V^{-1} est composé des coefficients du polynôme P_i de la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.