

1 _____ (*) _____

Soit p, n deux entiers et $x_0, \dots, x_p$ des réels deux à deux distincts. L'application suivante est-elle une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$?

$$N : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \sum_{k=0}^p |P(x_k)|$$

Il est clair que N vérifie la propriété de positive homogénéité, ainsi que l'inégalité triangulaire (car la valeur absolue les vérifie). Il ne reste plus qu'à vérifier la propriété de séparation. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $N(P) = 0$. Ce polynôme admet nécessairement les réels $x_0, \dots, x_p$ pour racines (car une somme de terme positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul). On distingue donc deux cas :

- Si $p \geq n$, P a admet au moins $n + 1$ racines. Puisqu'il est de degré au plus n , il est nul. Dans ce cas, la propriété de séparation est vérifiée et N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Si $p < n$, on ne peut pas conclure que P est nul. En effet, $P = (X - x_0) \cdots (X - x_p)$ est bien dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifie $N(P) = 0$ sans que P ne soit nul.

Pour conclure,

L'application N définit une norme si et seulement si $p \geq n$.

2 _____ (**) _____

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on définit pour $(x, y) \in E$

$$N_1(x, y) = \sup_{t \in [0;1]} |xt + y| \quad \text{et} \quad N_2(x, y) = \sup_{t \in [-1;1]} |xt + y|$$

Démontrer qu'il s'agit de normes et déterminer un réel α maximal et un réel β minimal pour lesquels on a

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$$

Les deux normes sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ comme bornes supérieures de fonctions continues sur un segment. Justifions les propriétés définissant une norme. Pour simplifier, on peut déjà remarquer qu'une fonction de la forme $t \longmapsto |xt + y|$ est bornée sur tout segment et atteint sa borne supérieure en l'une des extrémités du segment. On en déduit que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad N_1(x, y) = \max\{|y|, |x + y|\} \quad \text{et} \quad N_2(x, y) = \max\{|x - y|, |x + y|\}$$

On se contente de N_1 car la preuve est similaire pour N_2 .

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N_1(\lambda(x, y)) = \max\{|\lambda y|, |\lambda(x + y)|\} = |\lambda| \max\{|y|, |x + y|\} = |\lambda| N_1(x, y)$$

Ainsi, N_1 vérifie la propriété de positive homogénéité.

- Pour tout (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathbb{R}^2$,

$$|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2| \leq N_1(x_1, y_1) + N_1(x_2, y_2)$$

De la même manière,

$$|(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)| \leq N_1(x_1, y_1) + N_1(x_2, y_2)$$

et en passant au max

$$N_1((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \leq N_1(x_1, y_1) + N_1(x_2, y_2)$$

ce qui prouve que N_1 vérifie l'inégalité triangulaire.

- Si $N_1(x, y) = 0$, alors $|y| = |x + y| = 0$ d'où $y = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $(x, y) = (0, 0)$ et N_1 vérifie la propriété de séparation.

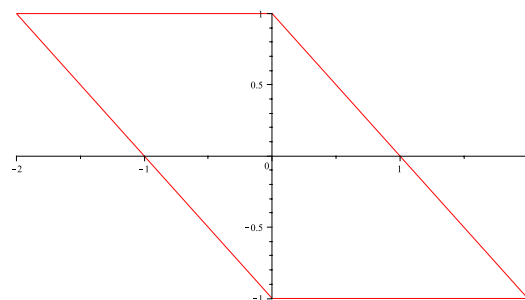
On peut donc conclure

Les applications N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

Pour déterminer α et β optimaux, il suffit de chercher les extremums α et β de N_2 sur la boule unité B_1 de N_1 . En effet, si l'égalité $\alpha \leq N_2 \leq \beta$ est valable et optimale sur la boule unité de N_1 , on aura par positive homogénéité de N_2 l'encadrement optimal $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$ sur tout E . La boule B_1 est définie par

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y), |y| = 1 \text{ et } |x + y| \leq 1\} \cup \{(x, y), |x + y| = 1 \text{ et } |y| \leq 1\} \\ &= \{(x, 1), x \in [-2; 0]\} \cup \{(x, -1), x \in [0; 2]\} \\ &\quad \cup \{(1 - y, y), y \in [-1; 1]\} \cup \{(-1 - y, y), y \in [-1; 1]\} \end{aligned}$$

Elle est représentée ci-contre.



Il ne reste plus qu'à étudier N_2 sur les quatre segments de droite constituant B_1 (deux suffisent d'ailleurs, puisque par positive homogénéité, $N_2(x) = N_2(-x)$). On vérifie facilement grâce à la représentation graphique de B_1 et la nouvelle expression de N_2 que N_2 est majorée par 3 sur B_1 , qui est atteint en $(-1, 1)$ et $(1, -1)$, et minorée par 1, atteint en $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Par conséquent,

$$N_1 \leq N_2 \leq 3N_1 \text{ et l'encadrement est optimal.}$$

3 ————— (**) —————

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{g \in B(0,1)} \left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right|$$

- Montrer que N est une norme sur E .
- Montrer que $N = \|\cdot\|_{1,[0;1]}$.

- Commençons par justifier que N est bien définie. Si g appartient à $B(0, 1)$, on a $\|g\|_\infty \leq 1$, soit $|g(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0; 1]$, et donc

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| |g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \quad (\star)$$

Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right|, g \in B(0, 1) \right\}$

est majoré donc sa borne supérieure est bien définie.

La positive homogénéité est évidente. Pour l'inégalité triangulaire, considérons f_1 et f_2 continues sur $[0; 1]$ et $g \in B(0, 1)$. Alors, par linéarité de l'intégrale et propriété de la valeur absolue,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (f_1 + f_2)(t)g(t) dt \right| &\leq \left| \int_0^1 f_1(t)g(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f_2(t)g(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{g \in B(0,1)} \left| \int_0^1 f_1(t)g(t) dt \right| + \sup_{g \in B(0,1)} \left| \int_0^1 f_2(t)g(t) dt \right| \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable quelle que soit g , on peut passer à la borne supérieure, ce qui donne

$$N(f_1 + f_2) \leq N(f_1) + N(f_2)$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire est vérifiée. Reste la propriété de séparation. Raisonnons par l'absurde. Si f est non nulle et telle que $N(f) = 0$, on peut poser $g = f/\|f\|_\infty$ qui est un élément de $B(0, 1)$ et donc

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right| = \frac{1}{\|f\|_\infty} \left| \int_0^1 f(t)^2 dt \right| \leq N(f) = 0$$

Par suite, la fonction positive et continue f^2 est d'intégrale nulle donc identiquement nulle. C'est absurde car on a supposé f non nulle. On peut donc conclure

$$\boxed{\text{L'application } N \text{ définit une norme sur } E.}$$

- Montrons l'égalité des deux applications par double inégalité. Soit $f \in E$. En passant à la borne supérieure dans $(\star)$, on obtient l'inégalité

$$N(f) \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_{1,[0;1]}$$

Justifions maintenant l'inégalité réciproque. Si f est nulle, elle est évidente. Sinon, on considère $g = f/\|f\|_\infty$ et on pose $g_n = g^{1/(2n+1)}$. Alors, $g_n \in B(0, 1)$. En effet, l'application $\varphi : x \mapsto x^{1/(2n+1)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc g_n est continue. De plus, $g/\|g\|_\infty$ est à valeurs dans $[-1; 1]$ qui est stable par φ . Par suite, pour tout entier n ,

$$\left| \int_0^1 f(t)g_n(t) dt \right| = \frac{1}{\|f\|_\infty^{1/(2n+1)}} \left| \int_0^1 f(t)^{2n/(2n+1)} dt \right| \leq N(f) \quad (\star\star)$$

Pour conclure, il suffit maintenant de prouver que le membre de gauche ci-dessus tend vers $\|f\|_{1,\infty}$. Utilisons pour cela le théorème de convergence dominée :

- Pour tout entier n , la fonction g_n est continue donc intégrable sur $[0; 1]$.
- Pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$g_n(t) = \begin{cases} \exp(|f(t)|/(2n+1)) & \text{si } f(t) > 0 \\ 0 & \text{si } f(t) = 0 \\ -\exp(|f(t)|/(2n+1)) & \text{si } f(t) < 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } f(t) > 0 \\ 0 & \text{si } f(t) = 0 \\ -1 & \text{si } f(t) < 0 \end{cases}$$

et ainsi dans tous les cas $f(t)g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |f(t)|$

- Pour finir, on a clairement $|g_n| \leq 1$ et donc $|f \cdot g_n| \leq 1$ pour tout entier n .

Le théorème s'applique et prouve que

$$\int_0^1 f(t)g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f(t)| dt$$

En passant à la limite dans $(\star\star)$, on obtient donc la minoration $N(f) \geq \|f\|_{1,[0;1]}$ et donc l'égalité. Cela étant valable pour tout f ,

$$N = \|\cdot\|_{1,[0;1]}$$

4 ————— $(**)$ —————

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie $n \geq 1$. On considère une partie C de E convexe, compacte (c'est-à-dire fermée et bornée), symétrique (soit $x \in C$ ssi $-x \in C$) et contenant une boule de centre 0 et de rayon r strictement positif.

- (a). Pour tout $x \in E$, on pose $E_x = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x}{\lambda} \in C \right\}$

Montrer que E_x admet une borne inférieure. On note $j_C(x)$ ce réel.

- (b). Montrer que $j_C : x \mapsto j_C(x)$ est une norme sur E (appelée la jauge de C) et que C est sa boule unité.

- (a) Puisque E_x est minorée par 0, il suffit de montrer que cet ensemble est non vide. Pour cela, remarquons que pour λ suffisamment grand, le vecteur x/λ est de norme strictement inférieur à r . Puisque la boule $B(0, r)$ est incluse dans C , cela signifie que x/λ appartient à C , et donc que λ appartient à E_x . Notamment,

L'ensemble E_x admet une borne inférieure.

- (b) La question précédente montre que j_C est bien définie. Justifions les trois propriétés définissant une norme.

- Commençons par la propriété de séparation. Si x est tel que $j_C(x) = 0$, alors par définition de la borne supérieure, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{x}{\lambda_n} \in C$$

Mais si x est non nul, la norme de x/λ_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Cela contredit le caractère borné de C . Par conséquent, x est nul lorsque $j_C(x) = 0$.

La réciproque est immédiate en remarquant que $E_0 = \mathbb{R}_+^*$ donc $j_C(0) = \inf \mathbb{R}_+^* = 0$. Ainsi, j_C vérifie la propriété de séparation.

- Soit $x \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\lambda \in E_{\mu x} \iff \frac{\mu x}{\lambda} \in C \iff \frac{\lambda}{\mu} \in E_x \quad \text{et donc} \quad E_x = \mu E_{\mu x}$$

En passant à la borne inférieure, il vient $j_C(\mu x) = \mu j_C(x) \quad \forall \mu > 0$

Le cas $\mu = 0$ découle de la propriété de séparation. Pour justifier l'égalité pour μ négatif, il suffit de montrer que $j_C(x) = j_C(-x)$, ce qui est une conséquence de la symétrie de C . En effet,

$$\lambda \in E_{-x} \iff \frac{-x}{\lambda} \in C \iff \frac{x}{\lambda} \in C \iff \lambda \in E_x \quad \text{et donc} \quad E_x = E_{-x}$$

En passant à la borne inférieure, on a $j_C(x) = j_C(-x)$ pour tout x . Finalement, $j_C(\mu x) = |\mu| j_C(x)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$. Par suite, j_C vérifie la propriété de positive homogénéité.

- Soient pour finir x et y appartenant à E . Soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E_x et E_y , de limites respectives $j_C(x)$ et $j_C(y)$ (l'existence provient de la définition de la borne supérieure). Alors, pour tout entier n ,

$$\frac{x}{\lambda_n} \in C \quad \text{et} \quad \frac{y}{\mu_n} \in C \quad \text{d'où} \quad \frac{x+y}{\lambda_n + \mu_n} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} \frac{x}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} \frac{y}{\mu_n} \in C$$

par convexité de C . Ainsi, $\lambda_n + \mu_n \in E_{x+y}$ et donc

$$j_C(x+y) = \inf E_{x+y} \leq \lambda_n + \mu_n$$

et en passant à la limite

$$j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$$

Finalement, l'application j_C vérifie l'inégalité triangulaire.

Pour conclure,

L'application j_C est une norme sur E .

Il reste à montrer que la boule unité de j_C est l'ensemble C . Pour cela, on remarque que

- Si $x \in C$, alors $x/1 \in C$ donc $1 \in E_x$, et ainsi $j_C(x) \leq 1$.
- Réciproquement, soit x tel que $j_C(x) \leq 1$. Si $x = 0$, alors $x \in C$. Sinon, on choisit une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E_x de limite $j_C(x)$. Alors, la suite $(x/\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $x/j_C(x)$. Puisque C est compact, il est fermé ce qui prouve que $x/j_C(x)$ appartient à C . Enfin, sachant que C est convexe, contient 0 et que $j_C(x) \leq 1$, il vient

$$x = j_C(x) \frac{x}{j_C(x)} + (1 - j_C(x)) \cdot 0 \in C$$

Pour conclure, les éléments x de C sont exactement ceux pour lesquels $j_C(x)$ est inférieur ou égal à 1. En d'autres termes,

La boule unité de j_C coïncide avec l'ensemble C lui-même.

5

(***)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et N_1, N_2 deux normes sur E .

- Montrer que l'application $N^+ = \max(N_1, N_2)$ est une norme sur E .
- Montrer que $\min(N_1, N_2)$ n'est pas nécessairement une norme sur E .
- Soit F l'ensemble des normes N sur E vérifiant $N \leq \min(N_1, N_2)$. On admet que F est non vide (la preuve utilise l'équivalence des normes en dimension finie). Montrer que l'application N^- définie par

$$\forall x \in E, \quad N^-(x) = \sup_{N \in F} N(x)$$

est une norme sur E .

- On note B^+ la boule unité de N^+ et B^- celle de N^- et on cherche à exprimer ces deux ensembles en fonction des boules unités B_1 et B_2 des normes N_1 et N_2 .
 - Montrer que $B^+ = B_1 \cap B_2$.
 - Montrer que $N_1 \leq N_2$ si et seulement si $B_2 \subset B_1$.
 - En utilisant le résultat de l'exercice 4, écrire B^- à l'aide de B_1 et B_2 .
 - Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = |x| + |y|$ et $N_2(x, y) = \sqrt{2} \max(|x|, |y|)$. Dessiner les boules unités B_1, B_2, B^+ et B^- .

Dans les trois premières questions, il est clair que toutes les applications proposées vérifient la propriété de positive homogénéité et celle de séparation. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas nécessairement vérifiée et on se focalise donc exclusivement sur cette dernière.

- Soient $x, y \in E$. Alors, par définition, $N^+(x+y) = \max(N_1(x+y), N_2(x+y))$

Mais puisque N_1 et N_2 sont des normes, on a

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq \max(N_1(x), N_2(x)) + \max(N_1(y), N_2(y)) = N^+(x) + N^+(y)$$

et la même majoration pour $N_1(x+y)$ par symétrie des rôles de N_1 et N_2 . Ainsi,

$$N^+(x+y) \leq N^+(x) + N^+(y)$$

ce qui montre que

L'application N^+ est une norme sur E .

(b). Pour trouver un contre-exemple, on cherche un espace E et deux vecteurs x et y pour lesquels

$$\min(N_1(x+y), N_2(x+y)) \leq \min(N_1(x), N_2(x)) + \min(N_1(y), N_2(y))$$

Pour cela, cherchons des exemples pour lesquels $N_1(x)$ est petit devant $N_2(x)$ et en revanche $N_2(y)$ est petit devant $N_1(y)$. Il suffit pour cela de prendre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et de poser pour tout $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$N_1(v) = \lambda |v_1| + |v_2| \quad \text{et} \quad N_2(v) = |v_1| + \lambda |v_2|$$

Prenons ensuite $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$. Alors,

$$N_1(x) = N_2(y) = \lambda \quad N_2(x) = N_1(y) = 1 \quad \text{et} \quad N_1(x+y) = N_2(x+y) = 1 + \lambda$$

et en particulier, lorsque $\lambda < 1$, il vient

$$\min(N_1, N_2)(x+y) = 1 + \lambda > 2\lambda = \min(N_1, N_2)(x) + \min(N_1, N_2)(y)$$

L'inégalité triangulaire n'est donc pas systématiquement vérifiée, ce qui montre que

L'application $\min(N_1, N_2)$ n'est pas nécessairement une norme sur E .

(c). Soient $x, y \in E$. Pour tout $N \in F$, puisque N est une norme,

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y) \leq \sup_{N \in F} N(y) + \sup_{N \in F} N(x) = N^-(y) + N^-(x)$$

On peut donc passer à la borne supérieure à gauche pour obtenir

$$N^-(x+y) \leq N^-(x) + N^-(y)$$

Ceci étant valable pour tous $x, y \in E$,

L'application N^- est une norme sur E .

(d). 1. Par définition de N^+ , on a pour tout $x \in E$,

$$N^+(x) \leq 1 \iff \max(N_1(x), N_2(x)) \leq 1 \iff N_1(x) \leq 1 \text{ et } N_2(x) \leq 1 \iff x \in B_1 \text{ et } x \in B_2$$

et par conséquent,

$$B^+ = B_1 \cap B_2$$

2. Si $N_1 \leq N_2$, alors pour tout $x \in E$,

$$x \in B_2 \implies N_2(x) \leq 1 \implies N_1(x) \leq 1 \implies x \in B_1$$

et ainsi, B_2 est incluse dans B_1 .

Réciproquement, si B_2 est incluse dans B_1 , alors pour tout $x \in E$ non nul, $x/N_2(x)$ appartient à B_2 , donc il appartient à B_1 et ainsi,

$$N_1(x/N_2(x)) = N_1(x)/N_2(x) \leq 1 \quad \text{soit} \quad N_1(x) \leq N_2(x)$$

Par ailleurs, cette inégalité est évidente pour $x = 0$, ce qui prouve bien que $N_1 \leq N_2$. Finalement,

On a $N_1 \leq N_2$ si et seulement si $B_2 \subset B_1$.

3. Commençons par justifier que B^- contient B_1 et B_2 . D'après la question (d.2), il suffit de montrer que $N^- \leq N_1$ et $N^- \leq N_2$. Pour tout $x \in E$, alors par définition de F ,

$$\forall N \in F, \quad N(x) \leq \min(N_1(x), N_2(x))$$

et donc en particulier, en passant à la borne supérieure,

$$N^-(x) \leq \min(N_1(x), N_2(x)) \quad \text{soit} \quad N^-(x) \leq N_1(x) \text{ et } N^-(x) \leq N_2(x)$$

Ceci étant vrai pour tout x , il vient $N^- \leq N_1$ et $N^- \leq N_2$ et ainsi, d'après la question (d.1), B^- contient B_1 et B_2 d'où

$$B_1 \cup B_2 \subset B^-$$

Remarquons maintenant que par définition, la boule unité de n'importe quelle norme vérifie les propriétés de l'exercice 4 : c'est une partie convexe, compacte, symétrique de E et qui contient au moins une boule centrée en 0 de rayon strictement positif. Il se trouve que $B_1 \cup B_2$ vérifie toutes ces propriétés à l'exception de la convexité. Cela amène à poser K le plus petit convexe qui contient B_1 et B_2 (aussi appelée enveloppe convexe de B_1 et B_2). Montrons maintenant que K ainsi défini coïncide avec la boule unité B^- de N^- .

D'après le résultat de l'exercice 4, l'application j_K définit une norme sur E dont K est la boule unité. Puisque B^- est convexe et contient B_1 et B_2 , il contient également K . On a donc par la question (d.2)

$$B_1 \cup B_2 \subset K \subset B^- \quad \text{d'où} \quad N^- \leq j_K \leq \min(N_1, N_2)$$

et la dernière majoration montre que

$$j_K \in F \quad \text{d'où} \quad j_K \leq N^-$$

Finalement, $j_K = N^-$ et ainsi $B^- = K$. On peut donc conclure :

La boule unité B^- de N^- est le plus petit convexe contenant B_1 et B_2 .

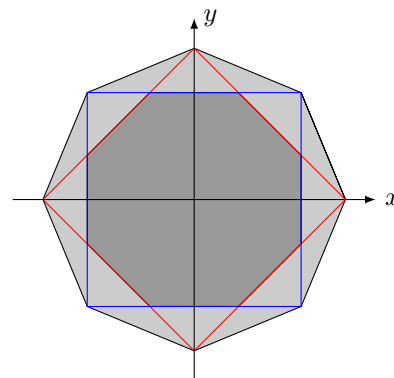
4. Il est clair que B_1 est un carré de sommets :

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0) \text{ et } (0, -1)$$

Par ailleurs, B_2 est un carré de sommets :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On en déduit les représentations graphiques ci-contre : la boule B^+ est la zone en gris sombre, on lui rajoute celle en gris clair pour obtenir la boule B^- . La frontière de B_1 est en rouge, celle de B_2 en bleu.



6 _____ (**) _____

Soit $E = \text{Vect} \{f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Montrer que l'application suivante est une norme sur E :

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$$

Soit f un élément de E . Il existe $p \in \mathbb{N}$, des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^p \lambda_k e^{\alpha_k x}$$

Notons $M = \max(|\alpha_k|)_{k \in [1;p]}$. Alors, pour tout entier n ,

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \alpha_k^n \quad \text{et} \quad \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = O\left(\frac{M^n}{n!}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Cela suffit à assurer la convergence de la série, et donc le fait que N soit bien définie. Reste à montrer les propriétés d'une norme :

- La propriété de positivité homogénéité est évidente, par linéarité de la dérivation et de la somme des séries convergentes.
- L'inégalité triangulaire également, par sommation puis passage à la limite à partir de l'inégalité

$$\frac{|(f+g)^{(n)}(0)|}{n!} = \frac{|f^{(n)}(0) + g^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} + \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $f, g \in E$.

- Pour la propriété de séparation, on conserve les notations précédentes. Si f est telle que $N(f) = 0$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \alpha_k^n = 0 \quad \text{d'où} \quad \forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k P(\alpha_k) = 0$$

En prenant des polynômes de la forme $\prod_{j \neq i} (X - \alpha_j)$, on obtient la nullité des $(\lambda_i)_{i \in [1;p]}$ et donc celle de f . Ainsi, N vérifie la propriété de séparation.

On peut donc conclure :

L'application N est une norme sur E .

7 _____ (***) _____

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de E . On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall f \in F, \quad \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$$

Montrer que F est de dimension finie inférieure ou égale à C^2 .

On munit F d'une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$. Quitte à utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on peut même la supposer orthonormée pour le produit scalaire dont découle la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, défini on le rappelle par

$$\forall f, g \in E, \quad f|g = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Pour tous réels $a_1, \dots, a_p$, on note

$$g = \sum_{i=1}^p a_i e_i \in F$$

Puisque la base est orthonormée, il vient

$$\|g\|_2^2 = \sum_{i=1}^p a_i^2 \quad \text{d'où} \quad \|g\|_\infty \leq C \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 \right)^{1/2}$$

On fixe maintenant x dans $[0; 1]$ et on choisit $a_i = e_i(x)$ pour tout $i \in [0; 1]$. Alors en particulier,

$$g(x) = \sum_{i=1}^p e_i(x)^2 \leq C \left(\sum_{i=1}^p e_i(x)^2 \right)^{1/2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=1}^p e_i(x)^2 \leq C^2$$

En intégrant sur $[0; 1]$, il vient par linéarité de l'intégration

$$\sum_{i=1}^p \|e_i\|_2^2 = p \leq C^2$$

On vient donc de justifier que toute famille libre de F comporte au plus C^2 éléments. Ainsi,

Le sous-espace vectoriel F est de dimension finie au plus C^2 .

8 _____ (*) _____

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel E de dimension finie et $x \in E$. On note

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y), y \in A\}$$

Comparer $d(x, A)$, $d(x, A^\circ)$ et $d(x, \overline{A})$.

Par définition, on a $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$. Ces inclusions montrent donc que

$$\{d(x, y), y \in \overset{\circ}{A}\} \subset \{d(x, y), y \in A\} \subset \{d(x, y), y \in \overline{A}\}$$

et donc

$$d(x, \overset{\circ}{A}) \geq d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$$

La première inégalité peut être stricte, en prenant par exemple $A = [0; 1] \cup \{2\}$ et $x = 3$ car alors $\overset{\circ}{A} =]0; 1[$ d'où $d(x, A) = 1$ et $d(x, \overset{\circ}{A}) = 2$. Montrons que la seconde est en fait une égalité. Il suffit pour cela de justifier l'inégalité réciproque. Fixons $\epsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure,

$$\exists y \in \overline{A}, \quad d(x, y) \leq d(x, \overline{A}) + \epsilon$$

puis, par définition de l'adhérence,

$$\exists z \in A, \quad d(y, z) \leq \epsilon$$

En particulier,

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, \overline{A}) + 2\epsilon$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\epsilon > 0$, il vient $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$. Finalement,

Pour toute partie A non vide d'un espace vectoriel E et tout vecteur x ,

$$d(x, \overline{A}) = d(x, A) \leq d(x, \overset{\circ}{A})$$

la dernière inégalité pouvant être stricte.

9 _____ (*) _____

Montrer que l'ensemble A suivant est un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$

Pour tous $i < j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i - x_j \end{array}$$

L'application $\varphi_{i,j}$ est continue car polynomiale donc l'image réciproque $O_{i,j}$ de $\mathbb{R}^*$ par $\varphi_{i,j}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Mais par définition,

$$A = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} O_{i,j}$$

Sachant qu'une intersection finie d'ouverts reste un ouvert,

L'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

10

(*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et C une partie convexe de E . Montrer que $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$ sont convexes.

Montrons que $\overset{\circ}{C}$ est convexe. Soient x et y appartenant à $\overset{\circ}{C}$. Par définition, il existe r_1 et r_2 strictement positifs tels que

$$B(x, r_1) \subset C \quad \text{et} \quad B(y, r_2) \subset C$$

Soit maintenant $t \in [0; 1]$. On note $z = tx + (1-t)y$. Prenons $r = \min(r_1, r_2)$ et montrons que $B(z, r)$ est incluse dans C . Soit a appartenant à cette boule. Par définition, le vecteur $u = a - z$ est de norme strictement inférieure à r . Remarquons alors que

$$a = z + u = tx + (1-t)y + u = t(x + u) + (1-t)(y + u)$$

avec $x + u \in B_{x,r} \subset B_{x,r_1}$ et $y + u \in B_{y,r} \subset B_{y,r_2}$. En particulier, $x + u$ et $y + u$ appartiennent à C et donc, par convexité de C , a également. Ceci étant vrai pour tout $a \in B_{z,r}$, la boule toute entière est incluse dans C , ce qui assure que z est un élément de $\overset{\circ}{C}$. Ceci étant vrai pour tout $t \in [0; 1]$,

L'ensemble $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Pour $\overline{C}$, c'est plus simple grâce à la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Considérons x et y deux éléments de $\overline{C}$ et deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers ces deux vecteurs. Alors, pour tout réel $t \in [0; 1]$,

$$tx_n + (1-t)y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} tx + (1-t)y$$

Par convexité de C , le vecteur $tx_n + (1-t)y_n$ est dans C pour tout entier n . Ainsi, $tx + (1-t)y$ est limite d'une suite d'éléments de $\overline{C}$ pour tout $t \in [0; 1]$, ce qui prouve que

L'ensemble $\overline{C}$ est un convexe de E .

11

(**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Montrer que si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite est un fermé.

Notons X l'ensemble des valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et considérons une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X convergente. Alors, v est une suite bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que v soit à valeurs dans $B(0, M)$. Par hypothèse, la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n| > M$$

Notamment, l'intersection de X et de $B(0, M)$ est incluse dans l'ensemble fini $\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}\}$. Montrons que v est alors nécessairement stationnaire. Puisque v converge, $(v_n - v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle. Posons alors

$$\epsilon = \min \{|u_i - u_j|, i, j \in [0; n_0 - 1], u_i \neq u_j\}$$

Par définition de la limite,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_0, \quad |v_{n+1} - v_n| < \epsilon$$

La définition de ϵ , et le fait que v soit à valeurs dans $\{u_0, \dots, u_{n_0-1}\}$ impose alors que $v_{n+1} = v_n$ à partir du rang N , et donc que v est stationnaire. Il existe donc $p \in [0; n_0 - 1]$ tel que $v_n = u_p$ pour tout $n \geq N$, et ainsi v converge vers u_p qui est bien un élément de X . Finalement,

L'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de $\mathbb{K}$.

12

(**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ rg } A = p\} \quad \text{et} \quad B_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ rg } A \leq p\}$$

Les ensembles A_p et B_p sont-ils ouverts ? fermés ?

On pourra utiliser le résultat suivant : A est de rang p si et seulement si on peut extraire une matrice B inversible de taille p de A , c'est-à-dire en supprimant $n - p$ lignes et $n - p$ colonnes à A .

Considérons déjà les cas particulier $p = 0$ et $p = n$.

- $A_0 = B_0 = \{0\}$ qui est un fermé mais pas un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $A_n = \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tandis que $B_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est à la fois ouvert et fermé. En revanche, A_n n'est pas un fermé car par exemple, la suite $(I_n/k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices inversibles qui converge la matrice nulle, non inversible.

Traisons maintenant le cas où $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

- L'ensemble A_p n'est pas un fermé : pour n'importe quelle matrice M de rang p , la suite $(M/k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle qui n'est pas dans A_p .
- Son complémentaire n'est pas non plus fermé : la suite de matrice suivante d'éléments de ${}^c A_p$ converge vers un élément de A_p

$$(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \quad \text{avec} \quad X_k = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 1/k \cdot I_{n-p} \end{pmatrix}$$

Ainsi, A_p n'est pas un ouvert. Cet exemple montre également que B_p n'est pas un ouvert.

- Pour finir, montrons que B_p est un fermé. Soit $M \in {}^c B_p$. Par définition, le rang q de M est strictement supérieur à p , et on peut extraire de M une matrice $\tilde{M}$ de taille q et de déterminant non nul. Notons alors

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \det \tilde{X} \end{aligned}$$

où $\tilde{X}$ est la matrice obtenue à partir de X en supprimant les mêmes lignes et les mêmes colonnes que dans M pour obtenir $\tilde{M}$. L'application φ est polynomiale donc continue. L'image réciproque U de $\mathbb{R}^*$ est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il existe $r > 0$ tel que $B_{M,r}$ soit incluse dans U . Mais alors, si $A \in B_{M,r}$, la matrice extraite $\tilde{A}$ est de déterminant non nul, donc A est de rang au moins q , donc strictement supérieur à p . Cela signifie que $B_{M,r}$ est incluse dans ${}^c B_p$. Ce dernier est donc ouvert et B_p est fermé.

Pour conclure

L'ensemble A_p est ouvert pour $p = n$, fermé pour $p = 0$ et n'est ni l'un ni l'autre sinon. L'ensemble B_p est ouvert et fermé pour $p = n$, et fermé sinon.

13

(*)

Soit d une distance sur un ensemble E . On dit que d est ultra-métrique si pour tout $x, y, z \in E$, on a

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) \quad (*)$$

- Soient x, y, z tels que $d(x, y) \neq d(y, z)$. Montrer que l'inégalité (*) est une égalité.
- Soit $x \in E$ et $r > 0$. Montrer que $B_{x,r}$ est un fermé et que $\overline{B_{x,r}}$ est un ouvert.
- Montrer que pour tout $y \in B_{x,r}$, on a $B_{x,r} = B_{y,r}$.
- Soient B_1 et B_2 deux boules de E . Montrer que si elles ont un point commun, alors l'une contient l'autre.

- Raisonnons par l'absurde en supposant l'inégalité stricte avec $d(x, y) \neq d(y, z)$. Sans perdre de généralité, on peut supposer $d(x, y) < d(y, z)$ et alors

$$d(x, z) < \max(d(x, y), d(y, z)) = d(y, z)$$

mais alors

$$\max(d(x, y), d(x, z)) < d(y, z)$$

ce qui contredit la propriété d'ultra-métrie. Par conséquent,

L'inégalité (*) est une égalité lorsque $d(x, y) \neq d(y, z)$.

- Montrons que $B_{x,r}$ est un fermé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B_{x,r}$ convergente vers un élément ℓ . Montrons que $\ell \in B_{x,r}$. Par définition, $d(u_n, x) < r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par définition de la limite (avec $\epsilon = r$),

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad d(u_n, \ell) \leq r$$

En particulier, $d(u_N, \ell) < r$ puis $d(x, \ell) \leq \max(d(x, u_N), d(u_N, \ell)) < r$

Cela assure que $\ell \in B_{x,r}$ et ainsi,

La boule $B_{x,r}$ est un fermé.

Soit maintenant $v \in \overline{B_{x,r}}$. Remarquons que $B_{v,r}$ est incluse dans $\overline{B_{x,r}}$. En effet, si $a \in B_{v,r}$, alors,

$$d(x, a) \leq \max(d(a, v), d(v, x)) \leq r$$

Ainsi, $B_{v,r} \subset \overline{B_{x,r}}$ ce qui prouve que

La boule $\overline{B_{x,r}}$ est un ouvert.

3. Soit $y \in B_{x,r}$ et $u \in B_{y,r}$. Alors,

$$d(x, u) \leq \max(d(x, y), d(y, u)) < r \quad \text{car} \quad d(x, y) < r \quad \text{et} \quad d(y, u) < r$$

Par suite, $u \in B_{x,r}$. Ceci étant vrai pour tout $u \in B_{y,r}$, on a $B_{x,r} \subset B_{y,r}$. L'inclusion réciproque s'obtient aussitôt par symétrie des rôles.

Pour tout $y \in B_{x,r}$, $B_{y,r} = B_{x,r}$.

4. Soient $x_1, x_2 \in E$ et $r_1, r_2 > 0$ tels que $B_1 = B_{x_1, r_1}$ et $B_2 = B_{x_2, r_2}$. Par hypothèse, il existe y appartenant aux deux boules. D'après la question précédente, on a donc

$$B_{x_1, r_1} = B_{y, r_1} \quad \text{et} \quad B_{x_2, r_2} = B_{y, r_2}$$

Dès lors, il est clair que B_1 est incluse dans B_2 si $r_1 \leq r_2$ et que B_2 est incluse dans B_1 sinon. Pour conclure,

Si deux boules ont une intersection non vide, l'une est incluse dans l'autre.

14

(***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes réels de degré n et scindés à racines simples. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Fixons $P \in \mathcal{E}_n$. Par définition, P est de degré n et scindé à racines simples. Notons donc $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ses racines et a_n son coefficient dominant, de sorte que

$$P = a_n(X - x_1) \cdots (X - x_n)$$

Sans perdre de généralité, on suppose que a_n est strictement positif (le cas strictement négatif se traite de la même manière). Dans ce cas, P est strictement positif sur $[x_n; +\infty[$, strictement négatif sur $]x_{n-1}; x_n[$ et plus généralement, du signe de $(-1)^{n-i}$ sur l'intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ avec par convention $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$.

Considérons maintenant des réels $y_0, \dots, y_{n+1}$ arbitraire avec $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Considérons $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ pour l'instant quelconque. Si $Q(y_i)$ est du même signe que $P(y_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on en déduit que Q change de signe entre y_i et y_{i+1} pour tout i , et donc qu'il admet une racine sur $]y_i; y_{i+1}[$. Il admet donc n racines distinctes et est scindé à racines simples. C'est donc un élément de $\mathcal{E}_n$.

Il reste donc à trouver une boule centrée en P dans laquelle tous les polynômes ont le même que P en $(y_0, \dots, y_n)$. Pour cela, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ de $\|\cdot\|_{\infty, [y_0; y_n]}$ définie par

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \|Q\|_{\infty, [y_0; y_n]} = \sup_{t \in [y_0; y_n]} |Q(t)|$$

puis on pose

$$r = \min_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket} |P(y_i)|$$

Par définition, si $Q \in B_{P,r}$, alors

$$\forall t \in [y_0; y_n], \quad |P(t) - Q(t)| < r \quad \text{et en particulier} \quad \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad |P(y_i) - Q(y_i)| < r \leq |P(y_i)|$$

Cette dernière inégalité suffit à montrer que $Q(y_i)$ et $P(y_i)$ sont de mêmes signes. Cela étant valable pour tout i , on en déduit grâce aux remarques précédentes que Q est scindé à racines simples. Par conséquent, $B_{P,r} \subset \mathcal{E}_n$ et finalement,

L'ensemble $\mathcal{E}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

15

(**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les seuls sous-ensembles de E à la fois fermés et ouverts sont E et l'ensemble vide.

Soit F une partie de E à la fois ouverte et fermée de E . On suppose par l'absurde en supposant que F n'est pas vide et est distinct de E . Par hypothèse, il existe $x_0 \in F$ puis, F étant ouverte, un réel $r_0 > 0$ tel que la boule $B(x_0, r_0)$ soit incluse dans X . De plus, puisque F est supposé distinct de E , il existe un élément y_0 qui n'appartient pas à E .

Notons maintenant $\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_t = x_0 + t \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$

Pour tout $t \in [0; r_0]$, on a $\|z_t - x_0\| \leq r_0$ et donc $z_t \in F$. Cela permet de définir

$$X = \{r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0; r], z_t \in F\} \quad \text{et} \quad \alpha = \sup X$$

Il est clair que X est un intervalle qui contient $[0; r_0]$. De plus, le réel α est bien défini car la partie X est bornée par $\|y_0 - x_0\|$, compte tenu du fait que y_0 n'appartienne pas à F .

Par définition, α est adhérent à X . On en déduit aussitôt que z_α est lui adhérent à F (si α est la limite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors z_α est limite de $(z_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$). Puisque F est fermé, on a z_α qui appartient à F , et ainsi l'existence de $s > 0$ tel que la boule $B(z_\alpha, s)$ soit incluse dans F . Cela implique notamment que $[\alpha; \alpha + s/2]$ est inclus dans X , ce qui contredit la définition de α . Par l'absurde, on a donc justifié que

Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans E sont E et $\emptyset$.

Remarque : Le résultat reste vrai en dimension quelconque et indépendamment du choix de la norme (la preuve ici n'utilise pas l'hypothèse de dimension finie).

16

(*)

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, A, B deux parties de E et enfin $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- (a). Montrer que si A est fermé, alors $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$ est fermé.
- (b). Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
- (c). On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad B = \{(t, 1/t), t \in \mathbb{R}^*\}$$

Montrer que A et B sont fermés. $A + B$ est-il fermé ?

- (a) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de λA . On note ℓ sa limite. Par définition, y_n/λ est une suite d'éléments de A , et elle converge vers ℓ/λ . Puisque A est fermée, ℓ/λ appartient à A et ainsi ℓ appartient à λA . Par suite,

λA est fermée.

- (b) Soit x un élément de $A + B$. Alors, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Puisque A est fermé, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a, r)$ soit incluse dans A . Vérifions que $B(x, r)$ est incluse dans $A + B$. Si y appartient à cette boule, on a

$$\|y - x\| = \|(y - b) - a\| < r \quad \text{d'où} \quad y - b \in B(a, r) \subset A$$

Par conséquent, $y = (y - b) + b$ appartient à $A + B$. Ceci étant vrai pour tout $y \in B(x, r)$, il s'ensuit que $A + B$ contient $B(x, r)$, et ainsi

$A + B$ est ouverte.

- (c) L'ensemble A est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto y$. C'est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc un fermé. De la même manière, B est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $f : (x, y) \mapsto xy - 1$ donc un fermé.

Les parties A et B sont fermées.

L'ensemble $A + B$ n'est en revanche pas fermée. En effet, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(0, 1/n) = (-n, 0) + (n, 1/n) \in A + B$$

La suite $((0, 1/n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite convergente d'éléments de $A + B$, mais sa limite $(0, 0)$ n'est pas dans $A + B$ car tous les éléments de $A + B$ ont par définition une ordonnée non nulle.

L'ensemble $A + B$ n'est pas fermé.

17

(**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . On note H l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ dont l'image est F . Montrer que H est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H convergente de limite p_∞ . Montrons que p_∞ est un élément de H . Par définition de H , on a les propriétés suivantes : pour tout entier n et tout élément x de F

$$p_n \circ p_n = p_n \quad p_n(x) = x \quad \text{et} \quad \text{Tr } p_n = \text{rg } p_n = \dim \text{Im } p_n = \dim F$$

Les applications $(u, v) \mapsto u \circ v$, $u \mapsto u(x)$ et la trace sont respectivement bilinéaire et linéaires donc continues puisque E est de dimension finie. On peut donc passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire que

$$p_\infty \circ p_\infty = p_\infty \quad p_\infty(x) = x \quad \text{et} \quad \text{Tr } p_\infty = \dim F$$

La première égalité montre que p_∞ est un projecteur. La seconde prouve alors que F est inclus dans l'image de p_∞ . Enfin, la dernière égalité prouve que le rang de p_∞ , qui est égal à sa trace est égal à la dimension de F . Avec l'inclusion précédente, cela prouve que l'image de p_∞ est exactement F . On peut donc conclure que p_∞ appartient à H . Ainsi,

L'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ dont l'image est F est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

18

(*)

On veut déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2 \quad (*)$$

Soit f une telle fonction non nulle.

(a) Déterminer la valeur de $f(0)$.

On suppose jusqu'à nouvel ordre que $f(0) = 1$.

(b) Montrer que $f(x)$ est strictement positif quel que soit le réel x .

(c) En déduire que la fonction $g : x \mapsto \ln f(x)$ est paire et que pour tout entier n et tout réel x , $g(nx) = n^2 g(x)$.

(d) Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = ar^2$.

(e) Conclure en déterminant toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la relation (*).

(a) En posant $x = y = 0$ dans (*), il vient $f(0)^2 = f(0)^4$ d'où $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$. Mais si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x

$$f(x+0)f(x-0) = f(x)^2 f(0)^2 \quad \text{soit} \quad f(x)^2 = 0$$

C'est absurde car f est supposée non nulle. Ainsi,

$$f(0) = 1 \text{ ou } f(0) = -1.$$

(b) Puisque f est continue avec $f(0) = 1$, il suffit de justifier que f ne s'annule pas. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, avec $x = y = x_0/2$ dans (*), il vient

$$f(x_0)f(0) = f(x_0/2)^4 = 0 \quad \text{puis} \quad f(x_0/2^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

par récurrence immédiate. On faisant tendre n vers $+\infty$, il vient par continuité de f en 0 que $f(0) = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, f ne s'annule pas et

La fonction f est strictement positive.

(c) En prenant $x = 0$ dans (*), on obtient pour tout réel y

$$f(-y)f(y) = f(y)^2 \quad \text{d'où} \quad f(y) = f(-y)$$

puisque f ne s'annule jamais. Ainsi, f est une fonction paire, de même que $\ln f$. La relation (*) se traduit sur g par la relation

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y) \quad (**)$$

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et montrons par récurrence forte que pour tout entier n , $g(nx) = n^2 g(x)$.

- L'égalité est clairement vérifiée pour $n = 0$ car $g(0) = \ln f(0) = \ln 1 = 0$.
- Supposons la relation vérifiée jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant x par nx et y par x dans (**), il vient

$$\begin{aligned} g((n+1)x) &= 2g(nx) + 2g(x) - g((n-1)x) \\ &= (2n^2 + 2 - (n-1)^2)g(x) \\ g((n+1)x) &= (n^2 + 2n + 1)g(x) = (n+1)^2 g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Finalement

La fonction g est paire et pour tout réel x et tout entier n , $g(nx) = n^2g(x)$.

- (d) Sous réserve d'existence de a , nécessairement $g(1) = a \cdot 1^2$ donc $a = g(1)$. Réciproquement, si r est un rationnel de la forme $r = 1/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question précédente

$$g(1) = g(qr) = q^2g(r) \quad \text{d'où} \quad g(r) = \frac{g(1)}{q^2} = g(1)r^2$$

Pour un rationnel maintenant quelconque, on note $r = p/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et il vient

$$g(p/q) = p^2g(1/q) = p^2g(1)/q^2 = g(1)r^2$$

Par suite,

Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(r) = ar^2$ pour tout rationnel r .

- (e) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(0) = 1$ d'après la question (a). On note alors $g : x \mapsto \ln f(x)$. D'après la question (d), il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto g(x) - ax^2$ s'annule sur $\mathbb{Q}$. Mais puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que g est continue (par composition car f l'est et ne s'annule pas), on en déduit que $x \mapsto g(x) - ax^2$ s'annule sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f : x \mapsto \exp(ax^2)$$

Réciproquement, on vérifie facilement qu'une fonction de cette forme, ainsi que son opposée, satisfait $(\star)$. Pour conclure,

Les fonctions qui vérifient $(\star)$ sont celles de la forme $x \mapsto \epsilon \exp(ax^2)$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $a \in \mathbb{R}$ **19** $(**)$

Si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on appelle homéomorphisme de A dans B toute bijection continue de A dans B dont la réciproque est également continue.

- (a). Montrer que $x \mapsto x/(1 + |x|)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$. Donner sa réciproque.
 (b). Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est homéomorphe à chacune de ses boules ouvertes.

- (a) Notons $f : x \mapsto x/(1 + |x|)$. Alors, f est impaire, continue comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Enfin, $f(0) = 0$ et f tend vers 1 en $+\infty$. On déduit de tout ceci que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$. D'après le cours de première année, on sait que la réciproque est également continue. Enfin, pour $x > 0$ et $y \in]0; 1[$,

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x} = y \iff x = \frac{y}{1-y}$$

Pour $x < 0$ et $y \in]-1; 0[$, on trouve

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1-x} = y \iff x = \frac{y}{1+y}$$

Ainsi, dans tous les cas, $f^{-1}(y) = y/(1 - |y|)$.

L'application $f : x \mapsto x/(1 + |x|)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$, dont l'inverse est $f^{-1} : y \mapsto y/(1 - |y|)$.

- (b) Soit $x_0 \in E$ et $r > 0$. On généralise le cas particulier précédent en posant

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow B(x_0, r) \\ x &\longmapsto x_0 + \frac{rx}{1 + \|x\|} \end{aligned}$$

L'application φ est continue car $x \mapsto 1 + \|x\|$ est continue (une norme est toujours continue) et ne s'annule pas sur E . Elle est bijective d'inverse continue donné cette fois par

$$\varphi^{-1} : y \longmapsto \frac{(y - x_0)/r}{1 - \|(y - x_0)/r\|} = \frac{y - x_0}{r - \|y - x_0\|}$$

Par suite,

L'espace vectoriel E est homéomorphe à toutes ses boules ouvertes.

Remarque : Le résultat reste vrai en dimension quelconque et indépendamment du choix de la norme (la preuve ici n'utilise pas l'hypothèse de dimension finie).

20

(**)

Soit A un fermé non borné de $\mathbb{R}^n$ et f continue sur A à valeurs réelles. On suppose que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

- Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_k = \{x \in A, f(x) \leq k\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

- Considérons $x_0 \in A$. Par hypothèse, puisque $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$,

$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad \|x\| > r \implies f(x) > f(x_0)$$

Notons $K = A \cap \overline{B}(0, r)$. Alors, K est fermé comme intersection de deux fermés, et borné par construction. C'est donc un compact et f est bornée sur K et atteint sa borne inférieure en un point $x_1 \in K$. Considérons maintenant x dans A .

- Si x est dans K , alors $f(x) \geq f(x_1)$ par définition de x_1 .
- Sinon, on a $\|x\| > r$ et donc $f(x) > f(x_0)$. Remarquons maintenant que x_0 est nécessairement dans K sans quoi on aurait $f(x_0) > f(x_0)$. Ainsi, $f(x_0) \geq f(x_1)$ et donc $f(x) \geq f(x_1)$.

On a donc justifié que $f(x_1)$ est bien un minorant de f sur A tout entier. Par suite,

La fonction f est minorée et atteint sa borne inférieure.

- Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble E_k est l'image réciproque de l'intervalle fermé $]-\infty; k]$ de $\mathbb{R}$. Puisque f est continue, c'est donc un fermé de $\mathbb{R}^n$. Il suffit donc de montrer qu'il s'agit d'une partie bornée.

Pour cela, on a par hypothèse l'existence de $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \geq k$ lorsque $\|x\| \geq r$. Ainsi, E_k est inclus dans la boule $\overline{B}(0, r)$, ce qui établit que E_k est borné. Finalement,

Pour tout $x > 0$, E_x est un compact de $\mathbb{R}^n$.

21

(**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ et enfin f un élément de $\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}(E)$.
- Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, $(f_k(e_i))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(e_i)$ dans E .
- Pour tout $x \in E$, $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E .

On procède par triple implication.

- (i) $\Rightarrow$ (iii) Considérons l'application $\Phi : \mathcal{L}(E) \times E \longrightarrow E$
 $(u, x) \longmapsto u(x)$

Cette application est bilinéaire entre des espaces vectoriels de dimension finies. Elle est donc continue. Si x est fixé dans E et si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f , alors par caractérisation séquentielle de la continuité

$$\Phi(f_k, x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Phi(f, x) \quad \text{soit} \quad f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x)$$

ce qui valide (iii) lorsque l'on suppose (i).

- (iii) $\Rightarrow$ (ii) Evident !
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur E . On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad N(u) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \|u(e_i)\|$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une norme sur E . Si l'on suppose (ii), alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\|f_k(e_i) - f(e_i)\| = \|(f_k - f)(e_i)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{d'où} \quad N(f_k - f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Le choix d'une norme étant arbitraire en dimension finie, on a bien démontré que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeait vers f dans $\mathcal{L}(E)$.

Finalement,

Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

22

(**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow E$ une application continue. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E \setminus \{a\}, \quad \|f(x) - a\| < \|x - a\|$$

(a) Déterminer $f(a)$.

Soit u_0 un élément quelconque de E et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n .

(b) Montrer que la suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

(c) On pose $K = \{x \in E, \ell \leq \|x - a\| \leq \|u_0 - a\|\}$. Montrer que K est un fermé borné de E .

(d) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

(a) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite a avec $x_n \neq a$ pour tout n (l'existence d'une telle suite est évidente, par exemple $x_n = a + h/2^n$ avec h quelconque non nul dans E). Alors pour tout entier n ,

$$\|f(x_n) - a\| < \|x_n - a\|$$

On peut passer à la limite par continuité de f et de la norme, ce qui donne

$$\|f(a) - a\| \leq \|a - a\| = 0$$

et donc

$$f(a) = a$$

(b) On distingue deux cas :

- S'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = a$, alors a étant un point fixe de f , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir du rang n_0 . La suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc nulle à partir du rang n_0 donc convergente.
- Sinon, on a $u_n \neq a$ pour tout n et donc d'après l'hypothèse sur f ,

$$\|f(u_n) - a\| < \|u_n - a\| \quad \text{soit} \quad \|u_{n+1} - a\| < \|u_n - a\|$$

La suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge.

Dans tous les cas,

La suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

(c) Il est clair que K est une partie bornée. Par ailleurs, c'est l'image réciproque du segment fermé $[\ell; \|u_0 - a\|]$ par l'application norme qui est continue (car 1-lipschitzienne). C'est donc un fermé de E . Par conséquent,

L'ensemble K est un compact de E .

(d) Raisonnons par l'absurde en supposant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers a . On est donc dans le second cas de la question (b) et par décroissance de $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$, il s'ensuit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans K . De plus, le réel ℓ est strictement positif. Considérons alors

$$g : K \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \frac{\|f(x) - a\|}{\|x - a\|}$$

L'application g est bien définie et continue sur le compact K car $x \longmapsto \|f(x) - a\|$ l'est par composition et car $x \longmapsto \|x - a\|$ est continue et ne s'annule pas sur K (dès lors que $\ell > 0$). On en déduit que g est bornée et atteint ses bornes sur K . Soit donc $x_0 \in K$ en lequel g atteint son maximum sur K . Nécessairement, $x_0 \neq a$ car a n'appartient pas à K . Dès lors,

$$g(x_0) = \frac{\|f(x_0) - a\|}{\|x_0 - a\|} < 1 \quad \text{et donc} \quad \forall x \in K, \quad g(x) \leq g(x_0) < 1$$

En particulier, pour tout entier n ,

$$g(u_n) \leq g(x_0) \quad \text{d'où} \quad \|u_{n+1} - a\| \leq g(x_0) \|u_n - a\| \quad \text{et donc} \quad \|u_n - a\| \leq g(x_0)^n \|u_0 - a\|$$

Cela implique que $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle (car $g(x_0) < 1$) et contredit donc l'hypothèse de départ. On peut donc conclure que

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

23 ————— (*) ————— **Mines PC 1998**

Soit B une matrice antisymétrique réelle. On suppose que $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on note C sa limite. Que peut-on dire de C ?

La suite $(B^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, extraite de $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices paires puisque

$${}^t(B^{2n}) = ({}^t B)^{2n} = (-B)^{2n} = B^{2n}$$

La limite C est donc nécessairement une matrice paire. Mais de la même manière, $(B^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices impaires donc la limite C est également impaire. On en déduit aussitôt que

La matrice C est nulle.