I. Préliminaires

$\boxed{1}$ La fonction R est la somme d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont on va vérifier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n \colon x \mapsto \sin(n^2 x)/n^2$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et par majoration classique de la fonction sinus, on a

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ceci prouve la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur $\mathbb{R}$ donc sa convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$. Dès lors,

$$\boxed{\text{La fonction R est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

$\boxed{2}$ Tout d'abord, la fonction $g \colon x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Au voisinage de 0,

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

par équivalent classique de la fonction sinus au voisinage de 0. Dès lors, g est prolongeable par continuité en $x = 0$ par la valeur 1. L'intégrale proposée est par conséquent faussement impropre en 0 et

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge. Pour $x \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

par majoration classique du sinus. La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par le critère de Riemann. Dès lors, la fonction g est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

$\boxed{3}$ La fonction $\widehat{f}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f, c'est une notion d'analyse harmonique qui sert notamment en théorie du signal.

Il s'agit ici d'une intégrale à paramètre, on va par conséquent appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est et que $t \mapsto e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$, avec $|f|$ positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.

$$\boxed{\text{Les conditions étant vérifiées, la fonction } \widehat{f} \text{ est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

II. Étude de la dérivabilité de R en 0

4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. En utilisant les hypothèses faites sur f, il vient

$$|f(nh)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2h^2+1} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2h^2}$$

ce qui prouve qu'à partir du rang $n = 1$ le terme général de $\mathrm{S}(h)$ est majoré par celui d'une série convergente d'après le critère de Riemann. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{S}(h) \text{ existe pour tout } h > 0.}$$

5 Cette question demande d'établir un lien entre une série et une intégrale. Il faut donc s'inspirer de la démonstration du théorème de comparaison série-intégrale. Par ailleurs, les questions mettant en jeu une partie entière sont souvent facilement réglées en se ramenant à l'inégalité la caractérisant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$. Pour tout $t \in [\,nh\,;(n+1)h\,[$ on a, par définition de la partie entière, $\lfloor t/h \rfloor = n$ d'où $\phi_h(t) = f\left(\lfloor t/h \rfloor h\right) = f\left(nh\right)$ et

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f\left(\lfloor t/h \rfloor h\right)\,\mathrm{d}t = f\left(nh\right)\int_{nh}^{(n+1)h} \mathrm{d}t = hf\left(nh\right)$$

par linéarité de l'intégrale. Cette égalité et la convergence de S prouvent celles de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_{nh}^{(n+1)h} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t$$

et la relation de Chasles donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t$$

En conclusion, on a bien $\boxed{\mathrm{S}(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\,\mathrm{d}t}$

6 Ici l'inégalité demandée s'établit, comme c'est parfois le cas, en « inversant » celle donnée par la partie entière.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

D'une part, en appliquant l'inégalité vérifiée par f, on a

$$|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\left(\lfloor t/h \rfloor h\right)^2 + 1} \qquad \textbf{(1)}$$

D'autre part, comme $t \geqslant 1$ et $h \in \,]\,0\,;1\,]$, en utilisant l'inégalité sur les parties entières on a

$$0 \leqslant t - 1 \leqslant t - h = \left(\frac{t}{h} - 1\right)h < \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h$$

Les quantités mises en jeu sont positives ainsi $(t-1)^2 \leqslant (\lfloor t/h \rfloor\, h)^2$ ce qui donne

$$\frac{\mathrm{C}}{1+(\lfloor t/h \rfloor\, h)^2} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+(t-1)^2} \tag{2}$$

Les inégalités (**1**) et (**2**) permettent de conclure.

$$\boxed{\forall h \in \left]\,0\,;1\,\right] \quad \forall t \in [\,1\,;+\infty\,[\qquad |\phi_h(t)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+(t-1)^2}}$$

$\boxed{7}$ Le résultat de la question 5 permet d'exprimer la fonction S à l'aide d'une intégrale à paramètre. La valeur de sa limite en 0 par valeurs supérieures va être établie à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite et du théorème de convergence dominée.

Posons $(h_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de l'ensemble $(\left]\,0\,;1\,\right])^{\mathbb{N}}$ convergente et de limite nulle. On définit alors, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\phi_n(t) = \phi_{h_n}(t)$.

- Par application de la définition de la partie entière, on a les inégalités suivantes

$$t - h_n < \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leqslant t \tag{3}$$

  dont on déduit, par continuité de f, que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = f(t)$$

  En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \lfloor t/h_n \rfloor\, h$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, donc par composition, ϕ_n est également continue par morceaux.

  Il en découle que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ convergeant simplement vers f.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[\,0\,;1\,]$. Dès lors, on peut poser $\mathrm{M} = \max\limits_{t\in[\,0\,;\,1\,]} |f(t)|$. Avec (**3**) et la positivité des h_n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leqslant 1$$

  d'où $$|\phi_{h_n}(t)| \leqslant \mathrm{M}$$

  Posons $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \phi(t) = \begin{cases} \mathrm{M} & \text{si } t \in [\,0\,;1\,] \\ \dfrac{\mathrm{C}}{1+(t-1)^2} & \text{si } t \in \left]\,1\,;+\infty\,\right[\end{cases}$$

  La fonction ϕ est bien positive, continue par morceaux et majore ϕ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de M sur $[\,0\,;1\,]$ et d'après la question 6 sur $\left]\,1\,;+\infty\,\right[$. Enfin, l'application ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car constante sur le segment $[\,0\,;1\,]$ et, de façon claire,

$$\phi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  ce qui assure son intégrabilité sur $\left]\,1\,;+\infty\,\right[$.

Il découle alors, par application du théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant arbitraire parmi celles de $(]\,0\,;1\,])^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers 0, par caractérisation séquentielle de la limite, il vient

$$\boxed{\lim_{h\to0^+}\mathrm{S}(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

8 Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $\qquad f(t) = \begin{cases}\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t = 0\end{cases}$

D'une part, comme vu à la question 2, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, si $|t|\leqslant \pi/2$, alors $|f(t)|\leqslant 1$ d'où

$$\left|(1+t^2)f(t)\right| \leqslant 1+t^2 \leqslant 1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Si maintenant $|t|\geqslant\pi/2$,

$$\left|(1+t^2)f(t)\right| \leqslant \frac{1+t^2}{t^2} = 1+\frac{1}{t^2} \leqslant 1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \leqslant 1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

par majoration classique du sinus. En posant $\mathrm{C} = 1+(\pi/2)^2$, il vient

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad |f(t)|\leqslant\frac{\mathrm{C}}{t^2+1}$$

On peut donc, pour tout $h\in\,]\,0\,;1\,]$, définir $\mathrm{S}(h)$ pour la fonction f et d'après la question 7 ainsi que le résultat admis dans les préliminaires, on a

$$\lim_{h\to0^+}\mathrm{S}(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Par ailleurs, $\qquad \mathrm{S}(h) = h + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(n^2h^2)}{n^2h} = h+\dfrac{1}{h}\mathrm{R}(h^2)$

d'où $\qquad \mathrm{R}(h^2) \underset{h\to0^+}{\sim} h\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

En posant $x = h^2>0$, on déduit que

$$\boxed{\mathrm{R}(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\sqrt{x}\,\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Il découle de cet équivalent que

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{R}(x)-\mathrm{R}(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{R}(x)}{x} = +\infty$$

La fonction R ne possède donc pas de dérivée à droite en 0, il en résulte que

$$\boxed{\text{La fonction R n'est pas dérivable en 0.}}$$

III. Formule sommatoire de Poisson

9 Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = f(x + 2n\pi)$. On note que u_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est. De plus, par hypothèses sur f, il vient

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}_1}{(2\,|n|\,\pi - |x|)^2 + 1}$$

Le $|x|$ présent au dénominateur de l'expression ne permet pas d'obtenir une majoration indépendante de x afin d'obtenir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. On va donc établir une convergence normale sur tout segment. Soit $\mathrm{M} > 0$, pour tout $|n| \geqslant \mathrm{M}/2\pi$ et tout $x \in [\,-\mathrm{M}\,;\mathrm{M}\,]$, on a alors

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}_1}{(2\,|n|\,\pi - \mathrm{M})^2 + 1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit donc que, pour $n \geqslant 1$, les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ convergent normalement sur tout segment, donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Par suite, leurs sommes sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois fonctions continues :

$$u_0, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{ et } \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $u_n(x + 2\pi) = u_{n+1}(x)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x + 2\pi) &= u_0(x + 2\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x + 2\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(x + 2\pi) \\
&= u_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n+1}(x) \\
&= u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{-n}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) + u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(x) \\
\mathrm{F}(x + 2\pi) &= \mathrm{F}(x)
\end{aligned}$$

par ré-indiçage, ce qui prouve que F est 2π-périodique. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction F est donc bien définie, continue et } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$$

> Il aurait été possible d'aller plus vite en utilisant le fait que l'application $n \mapsto n+1$ réalise une bijection de $\mathbb{Z}$ dans lui-même puis en effectuant un ré-indiçage. Néanmoins, les séries indexées sur $\mathbb{Z}$ n'étant pas explicitement au programme, se ramener à des séries dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ évite tout dépassement.

10 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \widehat{f}(n)e^{inx}$. Comme la fonction $x \mapsto e^{inx}$ est continue sur $\mathbb{R}$, v_n l'est également. De plus, par hypothèses sur f,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |v_n(x)| = \left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2 + 1} \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

On en déduit donc que, les séries $\sum \|v_n\|_\infty$ et $\sum \|v_{-n}\|_\infty$ indicées par $n \geqslant 1$ convergent. Dès lors, les séries $\sum v_n$ et $\sum v_{-n}$ convergent normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et leurs sommes sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de trois fonctions continues : v_0, et les sommes de $\sum v_n$ et $\sum v_{-n}$.
Enfin, il est clair que G est 2π-périodique car

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{in(x+2\pi)} = e^{inx}e^{2in\pi} = e^{inx}$$

$$\boxed{\text{La fonction G est donc bien définie, continue et } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$$

11 À la question précédente, il a été établi que les fonctions F et G sont continues et 2π-périodiques, on peut ainsi en calculer les coefficients $c_p\,(\mathrm{F})$ et $c_p\,(\mathrm{G})$ introduits dans l'énoncé. Soit $p \in \mathbb{Z}$, par définition

$$\begin{aligned}
c_p(2\pi\mathrm{F}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\mathrm{F}(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)e^{-ipt} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(t)e^{-ipt}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
c_p(2\pi\mathrm{F}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_{-n}(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtenant par la convergence normale de $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ démontrée à la question 9 donc en particulier sur $[\,0\,;2\pi\,]$. Pour tout couple $(p,n) \in \mathbb{Z}^2$, comme $e^{-ipt} = e^{-ip(t+2n\pi)}$, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} u_n(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-ip(t+2n\pi)}\,\mathrm{d}t$$

Il est clair que l'application $t \mapsto t + 2n\pi$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $[\,0\,;2\pi\,]$ sur $[\,2n\pi\,;2(n+1)\pi\,]$, ce qui permet d'effectuer un changement de variable

$$\int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-ip(t+2n\pi)}\,\mathrm{d}t = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}
c_p(2\pi\mathrm{F}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
c_p(2\pi\mathrm{F}) &= \widehat{f}(p)
\end{aligned}$$

En exploitant les mêmes arguments pour la fonction G, on obtient

$$\begin{aligned}
c_p(\mathrm{G}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi\widehat{f}(n)e^{int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t \\
c_p(\mathrm{G}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-pt)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $c_p(\mathrm{G}) = \widehat{f}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

> Le fait d'avoir bien détaillé le calcul du coefficient de Fourier de $2\pi\mathrm{F}$ nous permet d'être plus elliptique sur celui de G car la méthode générale et les arguments sont les mêmes, seuls certains détails des calculs diffèrent et ceux-ci seulement ont été bien justifiés.

Les fonctions $2\pi\mathrm{F}$ et G étant continues, 2π-périodiques et de mêmes coefficients c_p, on peut appliquer le résultat admis dans l'énoncé. Ainsi

$$\boxed{2\pi\mathrm{F} = \mathrm{G}}$$

> Les coefficients $c_p\,(f)$ introduits dans l'énoncé sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction f (notion qui était au programme de mathématiques de PC jusqu'en 2014). Le résultat admis est un résultat classique sur les séries de Fourier : si deux fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ ont mêmes coefficients de Fourier complexes alors elles sont égales.

12

> L'écriture $\widehat{f}\,(2n\pi/a)$ incite à poser le changement de variable $x = at/2\pi$ dans le calcul de $\widehat{f}$, ce qui conduit à considérer la fonction $t \mapsto f\,(at/2\pi)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $h(t) = f\,(at/2\pi)$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto at/2\pi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut donc effectuer, sous réserve d'existence, un changement de variable dans le calcul de $\widehat{h}(x)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(u)\,e^{-ix2\pi/a}\,\mathrm{d}t \\
\widehat{h}(x) &= \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

L'existence de $\widehat{f}$ prouvée à la question 3 montre celle de $\widehat{h}$ et justifie a posteriori le calcul. Pour pouvoir appliquer l'égalité de la question précédente à la fonction h, celle-ci doit être continue sur $\mathbb{R}$ (ce que nous avons déjà justifié) et vérifier deux inégalités (une pour h et une pour $\widehat{h}$). Si $(a/2\pi)^2 \geqslant 1$ alors, par hypothèse sur f,

$$|h(t)| = \left|f\left(\frac{at}{2\pi}\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}_1}{1+(at/2\pi)^2} \leqslant \frac{\mathrm{C}_1}{1+t^2}$$

Sinon, et toujours par hypothèses sur f, on a

$$|h(t)| = \left|f\left(\frac{at}{2\pi}\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}_1}{(a/2\pi)^2\left(t^2+(2\pi/a)^2\right)} \leqslant \frac{\mathrm{C}_1\,(2\pi/a)^2}{1+t^2} = \frac{\mathrm{C}_1'}{1+t^2}$$

ce qui prouve la première inégalité sur h. On répète le même raisonnement pour $\widehat{h}$ en remplaçant f par $\widehat{f}$ et C_1 par C_2 pour obtenir la seconde inégalité. La fonction h vérifie donc les hypothèses permettant de lui appliquer la formule établie dans la question 11, d'où

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(2n\pi)$$

Or $$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(2n\pi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\,(2n\pi \times a/2\pi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\,(an)$$

et $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{2\pi}{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right)$$

On a ainsi prouvé $$\boxed{\forall a>0 \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)}$$

IV. Étude de la dérivabilité de R en π

13 La fonction $z \mapsto e^z$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ avec un rayon de convergence égal à $+\infty$. Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{it^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} \\
&= 1 + it^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n}}{n!} \\
&= 1 + it^2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{p+2} t^{2p+4}}{(p+2)!} \\
e^{it^2} &= 1 + it^2 - t^4 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^p t^{2p}}{(p+2)!}
\end{aligned}$$

d'où, si $t \neq 0$, $$f(t) = i - t^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^p t^{2p}}{(p+2)!}$$

Ce résultat prouve que la définition de f en dehors de 0 se prolonge en une fonction développable en série entière avec un rayon de convergence égal à $+\infty$. Dès lors, on obtient un prolongement de f en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et comme ce prolongement coïncide avec la valeur de f en 0, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

14 Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Par un calcul simple

$$f'(t) = \frac{2it^2 e^{it^2} - 2\left(e^{it^2} - 1\right)}{t^3}$$

d'où $$|f'(t)| \leqslant \frac{2\left|it^2 e^{it^2}\right| + 2\left|e^{it^2}\right| + 2}{|t|^3} = \frac{2t^2 + 4}{|t|^3}$$

par inégalité triangulaire. On déduit bien que

$$\boxed{\lim_{t \to \pm\infty} f'(t) = 0}$$

De même, $$f''(t) = -4e^{it^2} - \frac{6ie^{it^2}}{t^2} + \frac{6\left(e^{it^2} - 1\right)}{t^4}$$

Ainsi, $$\boxed{f''(t) = -4e^{it^2} + \underset{t \to \pm\infty}{\mathrm{O}}\left(t^{-2}\right)}$$

15 Pour traiter cette question, nous allons procéder par étapes successives de réduction du problème.

- La fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire donc I converge si et seulement si l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$$
converge et on a, sous réserve de convergence
$$\mathrm{I} = 2\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$$

- L'application $x \mapsto x^2$ étant bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut effectuer un changement de variable sous réserve de convergence des intégrales mises en jeu. Avec $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ d'où $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/\left(2\sqrt{t}\right)$, par suite I converge si et seulement si l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
converge et dans ce cas, on a
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

- On remarque maintenant que l'application $t \mapsto e^{it}/\sqrt{t}$ est continue sur $]\,0\,;1\,[$ et comme $\left|e^{it}/\sqrt{t}\right| = 1/\sqrt{t}$ est l'expression d'une fonction intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ d'après le critère de Riemann, l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
est convergente.

- Pour étudier l'intégrabilité sur $[\,1\,;+\infty\,[$, on considère les applications $t \mapsto e^{it}/i$ et $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et vérifient

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{it}}{i} \times \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$$

On peut donc effectuer une intégration par parties sous réserve de convergence d'au moins une des intégrales mises en jeu. Dès lors,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \frac{1}{2i}\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et dans ce cas, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{it}}{i\sqrt{t}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2i}\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = ie^i + \frac{1}{2i}\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Or la fonction $t \mapsto e^{it}/t\sqrt{t}$ est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et $\left|e^{it}/t\sqrt{t}\right| = 1/t^{3/2}$ est une fonction intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ d'après le critère de Riemann. Par suite, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

converge.

En conclusion, $\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$

$\boxed{\mathbf{16}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto -(x/i)\,e^{-ixt}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left|-\frac{x}{i}e^{-ixt} \times f(t)\right| = \lim_{t\to\pm\infty} |xf(t)| = 0$$

on peut effectuer une intégration par parties : sous réserve de convergence, on a

$$\begin{aligned} x^2\widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)x^2e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{x}{i}f(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)xe^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\ x^2\widehat{f}(x) &= -i\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)xe^{-ixt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, $$\widehat{f}(x) \text{ existe} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)xe^{-ixt}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

De plus, comme les applications $t \mapsto f'(t)$ et $t \mapsto e^{-ixt}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, d'après la question 14, on a

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left|f'(t)e^{-ixt}\right| = \lim_{t\to\pm\infty} |f'(t)| = 0$$

On peut à nouveau effectuer une intégration par parties et, toujours sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
x^2\widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\left(-ixe^{-ixt}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[f'(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\
x^2\widehat{f}(x) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par suite, $$\widehat{f}(x) \text{ existe } \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Or dans la question 14, on a montré que

$$f''(t) = -4e^{it^2} + \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{O}}\left(t^{-2}\right)$$

et, d'après la question 15, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit que $\widehat{f}(x)$ existe et de plus

$$\left|x^2\widehat{f}(x)\right| = \left|-\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)|\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}$$

On a donc bien $$\boxed{\widehat{f}(x) = \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{O}}\left(x^{-2}\right)}$$

17 Pour faire le lien avec les questions précédentes, on va appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction f, il faut donc qu'elle en vérifie les hypothèses. Pour les établir, il est nécessaire d'utiliser le résultat « une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui est bornée en $\pm\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}$ » qui, même s'il est classique, n'est pas explicitement au programme et qu'il faut redémontrer.

On établit maintenant le résultat auxiliaire suivant :

Soit u une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $u(t) = \underset{t\to\pm\infty}{\mathrm{O}}(1)$. Alors il existe $\mathrm{D} > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|u(t)| \leqslant \mathrm{D}$$

En effet, en revenant à la définition d'un $\mathrm{O}(1)$ en $\pm\infty$, il existe $c_1 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tels que si $|t| > t_0$, alors $|u(t)| < c_1$. Par ailleurs, comme la fonction u est continue sur le segment $[\,-t_0\,;t_0\,]$, elle y est donc bornée. Soit c_2 un majorant de u sur ce domaine. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|u(t)| \leqslant \max\{c_1, c_2\} = \mathrm{D}$.

La fonction $t \mapsto (1+t^2)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \neq 0$, par inégalité triangulaire, il vient $\left|(1+t^2)f(t)\right| \leqslant 2(1+t^2)/t^2$ dont les limites en $\pm\infty$ sont finies. Elle est donc bornée en $\pm\infty$. Dès lors, en utilisant le résultat auxiliaire que l'on vient d'établir, on en déduit que la fonction $t \mapsto (1+t^2)f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une constante $\mathrm{D}_1 > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |f(t)| \leqslant \frac{\mathrm{D}_1}{1+t^2}$$

D'après la question 3, $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité précédente. Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto (1+x^2)\widehat{f}(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et d'après la question 16

$$\left(1+x^2\right)\widehat{f}(x) = \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{O}}(1)$$

Par suite, toujours en utilisant le résultat auxiliaire, on en déduit qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe une constante D_2 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{D}_2}{1+x^2}$$

Les conditions de la formule sommatoire de Poisson sont donc vérifiées pour f, et pour tout $a > 0$ on a donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

On applique cette formule pour $a = \sqrt{x}$ avec $x > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(n\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

Le terme de gauche est égal, par parité de f, à

$$f(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(n\sqrt{x}\right) = i + \frac{2}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ixn^2}-1}{n^2}\right) = i + \frac{2}{x}\left(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)\right)$$

par convergence des séries. Quant au terme de droite, il est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) + + \sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

Or, par la majoration obtenue sur $\widehat{f}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* \qquad \left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{D}_4}{\left(2n\pi/\sqrt{x}\right)^2 + 1} = \frac{\mathrm{D}_4 x}{4n^2\pi^2 + x} \leqslant \frac{\mathrm{D}_4 x}{4n^2\pi^2}$$

On en déduit que le terme de gauche est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + \underset{x\to 0^+}{\mathrm{O}}(x)\right)$$

En reprenant les différentes égalités, il vient

$$i + \frac{2}{x}\left(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + \underset{x\to 0^+}{\mathrm{O}}(x)\right)$$

dont on déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En posant } a = \widehat{f}(0)/2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b = -i/2 \text{ on a} \\ \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + a\sqrt{x} + bx + \underset{x\to 0^+}{\mathrm{O}}(x^{3/2})\end{array}}$$

Pour le calcul de a, on va procéder à une intégration par parties. En effet, les hypothèses en sont bien vérifiées car les deux fonctions $t \mapsto e^{it^2} - 1$ et $t \mapsto -1/t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-e^{it^2}+1}{t} = 0 = \lim_{t\to 0} \frac{-e^{it^2}+1}{t}$$

La première limite s'obtient facilement à l'aide d'une inégalité triangulaire et la seconde découle du développement limité de $t \mapsto e^{it^2}$ en 0. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-e^{it^2}+1}{t}\right]_0^{+\infty} + 2i\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t \\
\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= 2i\,\mathrm{I}
\end{aligned}$$

On trouve ainsi $$\boxed{a = 2i\,\mathrm{I}}$$

18 D'une part $$\mathrm{F}(4x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i4n^2x}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2n)^2x}}{n^2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x+\pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} \times e^{in^2\pi}}{n^2} \\
\mathrm{F}(x+\pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n^2} e^{in^2x}}{n^2}
\end{aligned}$$

Or n^2 a la même parité que n et les séries convergent normalement sur $\mathbb{R}$, d'où par compensation des termes impairs

$$\mathrm{F}(x+\pi) + \mathrm{F}(x) = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{(2p)^2x}}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{F}(4x)$$

On a donc $$\boxed{\mathrm{F}(x+\pi) = \frac{1}{2}\mathrm{F}\,(4x) - \mathrm{F}\,(x)}$$

19 Pour étudier la dérivabilité de R en π, on va se placer à son voisinage à l'aide de la question précédente. En effet, quand x tend vers 0, on a d'après la question 17

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x+\pi) &= \frac{1}{2}\mathrm{F}(4x) - \mathrm{F}(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{F}(0) + 2a\sqrt{x} + 4bx + \mathrm{O}(x^{3/2})\right) - \left(\mathrm{F}(0) + a\sqrt{x} + bx + \mathrm{O}(x^{3/2})\right) \\
\mathrm{F}(x+\pi) &= -\frac{1}{2}\mathrm{F}(0) + bx + \mathrm{O}(x^{3/2})
\end{aligned}$$

On en déduit donc qu'au voisinage de 0

$$\mathrm{R}(x+\pi) = \mathrm{Im}\ \mathrm{F}(x+\pi) = \mathrm{Im}\ (b)x + \mathrm{o}(x)$$

car $\mathrm{F}(0)$ est un nombre réel. Dès lors, R possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de π.

$$\boxed{\text{La fonction R est dérivable en } \pi \text{ et } \mathrm{R}'(\pi) = \mathrm{Im}\ (b) = \mathrm{Im}\ (-i/2) = -1/2.}$$