

PROBLÈME 1

Autour de la fonction sinus cardinal

Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

- Q1.** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\sin(t)| \leq t$.
- Q2.** Montrer que les fonctions F , G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.
- Q3.** Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
- Q4.** Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G .
- Q5.** Trouver une expression simple pour G et pour H . On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} \cos(\alpha t) dt$.
- Q6.** En déduire une expression simple pour F . Que vaut $F(1)$?

Partie II - Autour de la formule de Viète

- Q7.** Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$$

- Q8.** Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

Q9. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).$$

Q10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx} dt.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx}.$$

Q11. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

Q12. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}.$$

Q14. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question **Q11**.

PROBLÈME 1

Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α .

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

- Q6.** Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α .
- Q7.** Déterminer, suivant les valeurs du réel α , le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α . On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.
- Q8.** On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
- Q9.** Expliciter f_0 , f_{-1} et f_1 .
- Q10.** Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.
- Q11.** Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. On pourra comparer f_α à f_1 .

Partie II - Un logarithme complexe

Q14. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z , tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q15. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S . Pour tout x réel élément de $] -R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q16. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g .

Q17. Prouver que g est définie et de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

Q18. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q19. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

**Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1,
dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$**

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$.

Q20. Justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q21. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.
Pour tout $x \in]0, 1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1 - \alpha)$.

Q22. Prouver que, pour tout $x \in]0, 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q23. En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt.$$

Q24. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.