

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun** et d'en déduire une **forme normale pour des vecteurs propres**.

Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n . Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.

Les parties II, III et IV sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,

0_n la matrice nulle d'ordre n

et I_n la matrice identité d'ordre n .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \text{tel que } MX = 0\},$$

$$\text{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},$$

$\text{Sp}(M)$ le spectre de M ,

$$E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$$

$$\text{et } \text{Im}_\lambda(M) = \text{Im}(M - \lambda I_n).$$

Définitions :

- Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;

on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :

- i) $\mathbf{e} \neq 0$;
- ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$;
- iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$.

On définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A, B] = AB - BA$.

- Soient f et g , deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;

on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :

- i) $\mathbf{e} \neq 0$;
- ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;
- iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$.

On définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ETUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Déterminer le spectre de A .

I.1.b. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

I.1.c. A est-elle diagonalisable ?

I.1.d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B .

I.2.

I.2.a. Déterminer le spectre de B .

I.2.b. Montrer que $\text{Im}_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

I.2.c. B est-elle diagonalisable ?

I.3.

I.3.a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B .

I.4.

I.4.a. Vérifier que $[A, B] = C$.

I.4.b. Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C .

Partie II : CONDITION NECESSAIRE ET CONDITIONS SUFFISANTES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B .

II.1.a. Montrer que $\mathbf{e} \in \text{Ker}([A, B])$.

II.1.b. Vérifier que $\text{rg}([A, B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B]).$$

II.2. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la **propriété suivante** :

pour tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ .

II.4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

II.5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ est **vérifiée pour tout entier** $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété** $\mathcal{H}$.

On note $C = [A, B]$, on suppose que $\text{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A .

II.5.a. Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

II.5.b. Vérifier que $\text{Im}(C) = \text{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.

II.5.c. Montrer que $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d. Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n-1$.

Pour tout $X \in \text{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

II.5.e. Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.

En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B .

II.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III : ETUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P .

Pour tout polynôme P de E , on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)$.

III.1. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

III.2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E .

III.3.

III.3.a. Vérifier que si P est un vecteur propre de g , alors $\deg(P) \geq n$.

III.3.b. Montrer que X^n est vecteur propre de g .

Soit $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

III.4.

III.4.a. Vérifier que $\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

III.4.b. Montrer que $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$.

III.5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n + 1$.

$\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$.

On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ et B_n celle de g dans la même base.

III.6. Déterminer A_n et B_n .

III.7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.

III.7.a. Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et en déduire l'expression de $(A_1)^2$ et $(A_1)^3$.

III.7.b. Déterminer le rang de $[(A_1)^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

III.7.c. En déduire que la condition nécessaire de la question **II.1.b** n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question **II.6** n'est pas nécessaire.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FILIERE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2007

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Relations de commutation

Dans ce problème, on se propose de décrire les triplets (K, E, F) où K, E, F sont trois endomorphismes d'un espace vectoriel satisfaisant certaines relations de commutation. On désignera toujours par q un nombre complexe non nul et tel que pour tout entier $n > 0$, $q^n \neq 1$.

Première partie

Dans cette partie, on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geq 2$, et par $(x_1, \dots, x_n)$ une base de X .

1. Soit A un endomorphisme de X représenté dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ par une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que tout endomorphisme B de X , commutant à A , est aussi représenté par une matrice diagonale.

2. Soit $A_1, \dots, A_p$ des endomorphismes de X .

2.a) Montrer que, si les seuls sous-espaces vectoriels de X stables par $A_1, \dots, A_p$ sont $\{0\}$ et X , alors tout endomorphisme B de X , commutant à $A_1, \dots, A_p$, est un multiple scalaire de l'identité.

2.b) La réciproque est-elle vraie ?

Deuxième partie

On définit X et $(x_1, \dots, x_n)$ comme à la première partie. On note K_0 et F_0 les endomorphismes de X définis comme suit :

$$\forall p = 1, \dots, n, \quad K_0 x_p = q^{n+1-2p} x_p, \quad F_0 x_p = \begin{cases} x_{p+1} & \text{si } p < n \\ 0 & \text{si } p = n \end{cases}.$$

3. Calculer $K_0 F_0 - q^{-2} F_0 K_0$.

4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0 , puis ceux stables par F_0 et K_0 .

On définit un troisième endomorphisme E_0 de X par

$$E_0 x_p = \begin{cases} (q - q^{-1})^{-2} (q^{p-1} - q^{1-p}) (q^{n+1-p} - q^{p-n-1}) x_{p-1} & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1 \end{cases}.$$

5. Calculer $K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0$.

6. Vérifier la relation

$$E_0 F_0 - F_0 E_0 = (q - q^{-1})^{-1} (K_0 - K_0^{-1}).$$

7. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par K_0 , E_0 , F_0 .