

I Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1) = 1$, $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$.

On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On pose $m = f'(1)$.

I.A –

I.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note l sa limite.

I.A.2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f .

I.A.3) Montrer que $l = x_f$.

I.B – On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in [0, 1[$.

I.C – On suppose maintenant $m \leq 1$. Montrer que $x_f = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

I.D – Dans cette question, on suppose $m = 1$.

I.D.1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$.

I.D.2) En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim \frac{2}{f''(1)n}$.

On pourra utiliser le lemme de Cesaro admis en préambule.

I.E – On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

I.E.1) Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$.

I.E.2) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim cm^n$.