

Polynômes

1 _____ (*) _____

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $P \in \mathbb{C}[X]$ puis $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$:

$$(a) \quad (X^2 + 1)P'' - 6P = 0 \qquad (b) \quad P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \qquad (c) \quad P^2 - XQ^2 = XR^2$$

2 _____ (*) _____ **X PC 2009**

Soit $k \geq 2$ et $P \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$. On note $\omega_1, \dots, \omega_k$ les racines k -ièmes de l'unité. Montrer que

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P(\omega_j) = P(0)$$

3 _____ (**) _____ **Mines PC 2011**

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\int_n^{n+1} P(t) dt = n^2 + 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Généralités sur les espaces vectoriels

4 _____ (*) _____

Soit E un espace vectoriel et A, B, C trois sevs de E tels que

$$B \subset C \quad A + B = A + C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cap C$$

Montrer que $B = C$.

5 _____ (*) _____

Soient E un espace vectoriel et f, g deux projecteurs de E qui commutent. Que peut-on dire de $f \circ g$? Déterminer son noyau et son image.

6 _____ (**) _____

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On définit alors φ_g de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_g : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f &\longmapsto f \circ g - g \circ f \end{aligned}$$

- (a). Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- (b). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Calculer $\varphi_g^2(f)$ ainsi que $\varphi_g^3(f)$. En déduire une expression de $\varphi_g^n(f)$ pour tout entier n .
- (c). On suppose que g est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $g^p = 0$. Montrer que φ_g est lui aussi nilpotent.

7 _____ (***) _____

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (a). On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$ et $F = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$.
- (b). Réciproquement, on suppose qu'il existe E_1 , sev de E , et F_1 , sev de F tels que $E = \text{Ker } f \oplus E_1$ et $F = \text{Im } f \oplus F_1$. Montrer qu'il existe un unique élément g de $\mathcal{L}(F, E)$ tel que

$$f \circ g \circ f = f \quad g \circ f \circ g = g \quad \text{Ker } g = F_1 \quad \text{Im } g = E_1$$

8 _____ (**) _____

Soit E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E tels que u et v commutent et u est nilpotent. Montrer que $u + v$ est inversible si et seulement si v est inversible.

9 _____ (***) _____ **X PC 2014**

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P'(0) = 0\}$ et ϕ définie par

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Matrices

10 _____ (*) _____

Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

11 _____ (**) _____

Soient A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chercher les matrices X telles que $X + \text{Tr}(X)A = B$.

12 _____ (**) _____

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à **diagonale dominante**, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

13 _____ (***) _____

Soient $A_1, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes de taille n et commutant 2 à 2. Montrer que le produit $A_1 \cdots A_n$ est nul.

14 _____ (*) _____

Calculer, lorsqu'elle est inversible l'inverse de l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

15 _____ (**) _____

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r . On suppose que M se décompose par blocs de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{G}\ell_r(\mathbb{K})$$

Montrer que $D = CA^{-1}B$.

16 _____ (**) _____

(a). Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nuls. Déterminer $\text{rg } XY$ et $\text{Im } XY$.

(b). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r . Prouver l'existence de vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_r$, éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et lignes $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tels que

$$M = X_1 Y_1 + \cdots + X_r Y_r$$

17 _____ (**) _____

Pour quelles valeurs de $x, y \in \mathbb{R}$ a-t-on existence de deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$$

Déterminants

18 _____ (**) _____

Résoudre suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{C}$ le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \lambda^2)x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ \lambda x_1 + (1 + \lambda^2)x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots = \vdots \\ \lambda x_{n-2} + (1 + \lambda^2)x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \\ \lambda x_{n-1} + (1 + \lambda^2)x_n = 0 \end{array} \right.$$

19 _____ (*) _____

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = (i - j)_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \quad \text{et} \quad B = (|i - j|)_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$$

20 _____ (*) _____

Calculer le déterminant d'ordre $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

21 _____ (*) _____

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \alpha_2 & \ddots & \alpha_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & x \end{vmatrix}$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n, x$ sont des réels quelconques.

22 _____ (**) _____

Soit P un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de l'application

$$\begin{aligned} \varphi_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto PX \end{aligned}$$

23 _____ (*) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le déterminant des matrices par blocs suivantes, en fonction de $\det A$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$

24 _____ (**) _____

- (a). Soit $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P + iQ \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. En considérant l'application $t \mapsto \det(P + tQ)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P + \lambda Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
- (b). En déduire que si A et B sont deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

25 _____ (**) _____

Soit A, B, C, D quatre éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $CD = DC$ et D est inversible.

- (a). Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.
- (b). Montrer que le résultat reste vrai en supposant seulement que C et D commutent.

26 _____ (**) _____ **Mines PC 2014**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2 + I_n) \geq 0$.

27 _____ (***) _____

Soit $n \geq 2$. Déterminer les éléments $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + X) = \det A + \det X$$

En déduire que pour tous éléments A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$[\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A + X) = \det(B + X)] \implies A = B$$

28 _____ (**) _____

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ antisymétrique et J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Justifier que $\det(A + xJ)$ est indépendant du scalaire x .

29 _____ (***) _____ **X PC 2014**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

- Déterminer le cardinal de $\mathcal{E}_n$.
- Si $A \in \mathcal{E}_n$, montrer que $\det A$ est un multiple de 2^{n-1} .
- Donner les valeurs de $\det A$ lorsque A décrit $\mathcal{E}_n$ pour $n = 2, 3, 4$.

Dimension finie, théorème du rang

30 _____ (*) _____

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de rang r . On extrait de cette famille une famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ dont on note q le rang. Montrer que $q \geq r + p - n$.

31 _____ (*) _____

Soit E de dimension finie n et f un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe un élément de $\mathbb{K}$ tel que $f^2 = af$.

32 _____ (**) _____

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad P_n = \frac{X(X-n)^{n-1}}{n!}$$

- Montrer que pour tout entier n et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$. En déduire $P_n^{(k)}(k)$.
- Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Soit Q de degré inférieur ou égal à m . Déterminer les coordonnées de Q dans cette base.

33 _____ (**) _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Déterminer l'ensemble des endomorphismes f de E tels que

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g \circ f) \quad (\star)$$

34 _____ (**) _____

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . On note $\mathcal{V}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E . On considère φ une application de $\mathcal{V}(E)$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(\{0\}) = 0$, $\varphi(E) = n$ et pour tous éléments E_1 et E_2 de $\mathcal{V}(E)$

$$\varphi(E_1 + E_2) + \varphi(E_1 \cap E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$$

- Montrer si $E_1, \dots, E_k$ sont en sommes directes, alors

$$\varphi\left(\bigoplus_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \varphi(E_i)$$

- Soit F un hyperplan de E . Montrer qu'il existe n sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_n$ tels que pour tout i , G_i soit de dimension 1, supplémentaire à F dans E , et tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^n G_i$$

- En déduire que $\varphi(F) = n - 1$ puis que $\varphi(G) = 1$ pour toute droite vectorielle G .
- En utilisant ce qui précède, montrer que $\varphi = \dim$.

35 _____ (*) _____ **Mines PC 2014**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $x \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et on note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v = v \circ u\}$. Soit $\Phi : v \mapsto v(x)$.

- Montrer que Φ induit un isomorphisme de $C(u)$ dans E .
- Montrer que $C(u) = \text{Vect}\{I_d, u, \dots, u^{n-1}\}$.

36

(**)

- (a) Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

$$(i) \quad \exists h \in \mathcal{L}(F, G), \quad g = h \circ f \qquad (ii) \quad \text{Ker } f \subset \text{Ker } g$$

- (b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_{p+1}$ des applications linéaires non nulles de E vers $\mathbb{K}$. Pour tout $i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket$, on note $H_i = \text{Ker } f_i$. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes

$$(i) \quad H_1 \cap \dots \cap H_p \subset H_{p+1} \qquad (ii) \quad \exists a_1, \dots, a_p \in \mathbb{K}, \quad f_{p+1} = \sum_{k=1}^p a_k f_k$$

On pourra utiliser l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

37

(***)

X PC 2014

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour toute matrice N nilpotente, la matrice AN est nilpotente. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exercices supplémentaires non corrigés

38

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et de degré $n \geq 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$$

39

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ que l'on note $P = P_1 + i P_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $\text{Im}(z) < 0$ pour toute racine z de P .

- (a). Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|P(z)| = |P(\bar{z})|$, alors z est réel.
 (b). En déduire que P_1 est scindé sur $\mathbb{R}$.

40

Soit E un espace vectoriel et $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur E . On note φ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ x &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- (i) La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.
 (ii) L'application φ est surjective.
 (iii) Il existe $(x_1, \dots, x_p)$ tels que $\det(f_i(x_j))_{i,j \in \llbracket 1; p \rrbracket} \neq 0$.

41

On note

$$E = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A^T) = f(A)^T\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

42

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a). Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lequel tout élément non nul est inversible.
 (b). Le résultat obtenu pour $\mathbb{C}$ vaut-il encore pour $\mathbb{R}$? Résoudre la question précédente pour $n = 2$ et $\mathbb{R}$ à la place de $\mathbb{C}$.

- 1** Raisonner sur le(s) degré(s) d'une éventuelle solution.
- 2** Noter $P = \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r$ puis utiliser la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.
- 3** Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ quelconque, déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_n^{n+1} P(t) dt$ en fonction du degré et du coefficient dominant de P .
- 4** Remarquer que si x est un élément de C , alors il appartient à $A + C$.
- 5** Justifier que $f \circ g$ est un projecteur, puis que $\text{Ker } f \circ g = \text{Ker } f + \text{Ker } g$ et $\text{Im } f \circ g = \text{Im } f \cap \text{Im } g$.
- 6** (b) S'inspirer des cas $n = 2$ et $n = 3$ pour conjecturer une formule qui ressemble fortement à un binôme de Newton. Démontrer ensuite cette formule par récurrence.
- 7** (a) Raisonner par analyse-synthèse.
(b) Remarquer que f induit un isomorphisme de E_1 sur $\text{Im } f$ et construire g à l'aide de la somme directe $F = \text{Im } f \oplus F_1$.
- 8** Pour le sens direct, utiliser le binôme de Newton pour obtenir une égalité de la forme $v \circ w = I_d$ avec w bien choisie. Pour la réciproque, exploiter la factorisation de $1 - x^p$, valable dans un anneau quelconque.
- 9** On pourra commencer par étudier l'application $\varphi : P \mapsto P(X+a) - P(X-a)$ avec $a > 0$ quelconque, et en particulier le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P . Puis faire le lien avec ϕ .
Pour la surjectivité, prendre $Q \in \mathbb{R}[X]$ dont on note n le degré, puis considérer l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- 10** On pourra raisonner par analyse-synthèse pour chercher à décomposer de manière unique un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice triangulaire supérieure.
- 11** On pourra raisonner par analyse-synthèse, et distinguer plusieurs cas suivant la valeur des traces de A et B .
- 12** Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe X non nul tel que $AX = 0$, et utiliser l'indice i_0 tel que X_{i_0} soit de module maximal.
- 13** Raisonner sur les endomorphismes canoniquement associés à ces matrices en démontrant le lemme suivant :
« Si F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par u nilpotent, alors $\dim u(F) < \dim F$. »
- 14** Résoudre le système $Y = AX$. On pourra remarquer que pour $j \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, on peut dans la j -ième équation exprimer x_j en fonction de y_j, x_1 et x_n .
- 15** En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , que peut-on dire de C_j pour $j > r$? En déduire que l'on peut écrire $B = AQ$ et $D = CQ$ où $Q \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{K})$ et conclure.
- 16** (a) Considérer les vecteurs colonnes de XY .
(b) Commencer par le cas où $M = E_{1,1} + \dots + E_{r,r}$.
- 17** A l'aide de la trace et du déterminant, déterminer les valeurs de x et de y susceptibles de convenir puis établir la réciproque en remarquant que $(AB)A = A(BA)$.
- 18** Pour $\lambda \neq 0$, on pourra exprimer x_2 en fonction de x_1 , puis x_3 en fonction de x_1 , et ainsi de suite. On sera amené à discuter suivant la valeur de $1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^{2n}$.
- 19** Calcul direct par opérations sur les lignes et les colonnes.
- 20** Etablir une formule de récurrence d'ordre 2 vérifiée par D_n .
- 21** Faire un calcul direct (1ère méthode) ou adopter un point de vue polynomial (2ème méthode).
- 22** Déterminer la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en ordonnant ses éléments de la manière suivante :
$$\mathcal{B} = \{E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,n}\}$$
- 23** Utiliser des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A .
- 24** (a) Utiliser le fait qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ n'a qu'un nombre fini de racines.
(b) Remarquer que « A est semblable à B » s'écrit également « $AP = PB$ avec P inversible ».
- 25** (a) Multiplier à droite par une matrice par blocs bien choisie et de déterminant 1. Le but est d'obtenir un résultat de la forme

$$\begin{pmatrix} AD - BC & * \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

- (b) Appliquer le (a) avec $D - xI_n$ où x est tel que $D - xI_n$ est inversible, puis faire tendre x vers 0.

- 26** Comparer $\det M$ et $\det \overline{M}$ pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et utiliser le caractère multiplicatif du déterminant.
- 27** Commencer par montrer que $\det A = 0$, puis utiliser le fait que si A est de rang r , il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$ où J_r est la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 28** Justifier que $\varphi : x \mapsto \det(A + xJ)$ est affine et paire.
- 29** (b) Utiliser les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i allant de i à $n - 1$.
 (c) Commencer par donner un majorant grossier de $|\det A|$ pour $A \in \mathcal{E}_n$, puis utiliser le (b) pour restreindre au maximum les valeurs possibles de ce déterminant. Pour $n = 4$, on pourra développer par rapport à une colonne et utiliser les résultats du cas $n = 3$.
- 30** Sans perdre de généralité, on peut supposer que la famille extraite est $(e_1, \dots, e_p)$ et que $(e_1, \dots, e_q)$ est libre. Donner alors une famille génératrice de $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ ayant $n - (p - q)$ vecteurs.
- 31** Utiliser un vecteur y non nul appartenant à $\text{Im } f$ pour montrer que $f^2(x) = f(x)$ pour tout vecteur x avec a un réel bien choisi indépendant de x .
- 32** (a) On peut raisonner par récurrence sur k ou utiliser la formule de Leibnitz.
 (b) Ecrire Q comme combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_m$, dériver k fois, puis substituer à X une valeur bien choisie.
- 33** Pour f non nul et non inversible, on pourra construire g tel que $g \circ f = 0$ et $f \circ g \neq 0$.
- 34** (a) Procéder par récurrence sur k .
 (b) Introduire une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de F complétée en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et prendre pour $G_1, \dots, G_n$ des droites engendrées par n vecteurs bien choisis à partir de cette base.
 (c) Appliquer φ aux sommes directes précédentes.
 (d) Justifier qu'un espace vectoriel de dimension k est la somme directe de k droites vectorielles.
- 35** (a) Noter $\mathcal{B} = \{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$. Pour l'injectivité de ϕ , montrer que si v commute avec u , alors il s'annule sur $\mathcal{B}$. Pour la surjectivité, décomposer $y \in E$ arbitraire dans la base $\mathcal{B}$ pour lui trouver un antécédent par ϕ .
 (b) Utiliser le (a) pour trouver la dimension de $C(u)$, puis montrer que $\{I_d, u, \dots, u^{n-1}\}$ est libre.
- 36** (a) Pour construire h , on pourra commencer par compléter une base de $\text{Ker } f$ en une base de E .
 (b) Appliquer le (a) avec $G = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}$, $f = \varphi$ et enfin $g = f_{p+1}$.
- 37** Raisonner par contraposée avec l'endomorphisme u canoniquement associé à A . On pourra utiliser le résultat suivant :

« Si pour tout x , $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie. »