

Nature et calcul d'intégrales impropres

1 _____ (**) _____

Après avoir justifié la convergence de chacune de ces trois intégrales, établir les égalités

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \, dx$$

et en déduire leur valeur commune.

2 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

3 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}} \, dx$.

4 _____ (*) _____

(a). A quelle condition sur le réel α l'intégrale $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^\alpha} \, dt$ est-elle convergente ?

(b). Trouver en cas de convergence une relation entre I et $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

5 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x} \, dx$.

Intégrabilité, semi-convergence

6 _____ (*) _____

Etudier la convergence de $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) \cos^\alpha x \, dx$ suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

7 _____ (**) _____

Discuter suivant la valeur des réels α et β la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^\beta}{1+x^\alpha \sin^2 x} \, dx$

8 _____ (**) _____

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$ est convergente, mais pas absolument convergente.

9 _____ (*) _____

L'application $x \mapsto (1+x)^{1/(1+x)} - x^{1/x}$ est-elle intégrable sur $[1; +\infty[$?

10 _____ (**) _____

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$, continue par morceaux, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. On note $g : x \mapsto f(x) \sin x$.

(a). Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_0^{+\infty} g(t) \, dt$ l'est.

(b). Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t) \, dt$ est convergente.

11 _____ (**) _____ **X PC 2014**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et intégrable. Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad x_n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

12 _____ (***) _____ **X PC 2016**

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = O(1/x^2)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Soit $a > 0$. On définit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & h : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f\left(x + \frac{a}{x}\right) & & & x &\longmapsto f(\sqrt{4a + x^2}) \end{aligned}$$

Montrer que g et h sont intégrables et que
$$\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} h$$

13 _____ (*) _____ **CCP PC 2019**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que

$$\forall x > 0, \quad f(x+1) = xf(x) \quad \text{et} \quad f'' > 0$$

- Enoncer le théorème de Rolle.
- Pour tout $n \geq 1$, exprimer $f(n)$ en fonction de n et de $f(1)$.
 - Montrer qu'il existe $c \in]1; 2[$ tel que $f'(c) = 0$. En déduire les variations de f .
- Montrer que f' ne peut pas s'annuler en deux points de $\mathbb{R}_+^*$.
 - Montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que $f(2) > 0$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
 - Déterminer la nature de $I = \int_1^{+\infty} f(t) dt$.
- Nature de $J = \int_0^1 f(t) dt$ et $K = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$.

Suites et fonctions définies par une intégrale

14 _____ (**) _____ **Mines PC 2009**

On définit pour tout entier $n \geq 1$
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$$

- Trouver une relation de récurrence satisfaite par $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)^{1/n}$.

15 _____ (**) _____ **Mines PC 2008**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)} dx$$

- Montrer que I_n est une intégrale convergente pour tout entier n .
- Déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ à l'aide d'un changement de variable naturel.
- En déduire un équivalent de I_n .

16 _____ (**) _____ **Centrale & Mines PC 2016**

Soit F définie par
$$F : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Donner un équivalent de F en 0^+ . Est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Fonctions de carré intégrable

17 _____ (*) _____

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives et telle que f'^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

18 _____ (**) _____ **X PC 2014**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (f'(t)^2 + t^2 f(t)^2) dt$$

est convergente. Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \leq 2 \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

Exercices supplémentaires non corrigés

19 _____ (**) _____ **Mines PC 2024**

Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln|1-x| \cos(\ln(x))}{x^\alpha(1+x)} dx$ et $\int_0^1 \frac{\ln|1-x| \cos(\ln(x))}{x^\alpha(1+x)} dx$

20 _____ (**) _____ **Mines PC 2024**

Nature de $\int_0^{+\infty} |\sin x|^x dx$?

21 _____ (**) _____ **ENS PC 2024**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (a). On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- (b). On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Que peut-on dire de $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} ?$

22 _____ (**) _____ **Centrale PC 2024**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $]0; 1]$ et ℓ un réel strictement positif. On suppose que

$$f(x) \int_0^x f(t)^2 dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

- (a). Si f admet une limite en $+\infty$, quelle est cette limite ?
- (b). Trouver toutes les fonctions g telles que $\forall x > 0, \quad g(x) \int_0^x g(t)^2 dt = \ell$
- (c). Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

- 1** Utiliser un changement de variable pour comparer les deux premières. Pour la troisième, comparer $\int_0^\pi \ln \sin t$ à la première.
- 2** Faire le changement de variable $u = \operatorname{argsh} x$.
- 3** Faire un changement de variable en généralisant les règles de Bioche.
- 4** (b) Poser $u_n = \int_n^{n+1} [x]/x^\alpha dx$ pour $n \geq 1$ puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ par transformée d'Abel.
- 5** Ecrire $\int_0^A \frac{\operatorname{th} 3x - \operatorname{th} 2x}{x} dx$ comme l'intégrale sur $[2A; 3A]$ d'une certaine fonction.
- 6** En 0, utiliser le développement limité de $\tan$ et les comparaisons par équivalent. En $\pi/2$, utiliser un changement de variable pour se ramener en 0 et raisonner par équivalent et $o(\cdot)$.
- 7** Dans le cas $\alpha \geq 0$, utiliser la comparaison série-intégrale après avoir calculé $\int_0^\pi \frac{dt}{1 + a \sin^2 t}$.
- 8** Pour la convergence, utiliser une intégration par parties. Pour la convergence non absolue, montrer que la série $\sum u_n$ diverge où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x \sin(1/x)| dx$.
- 9** On pourra chercher un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$.
- 10** (a) Utiliser des séries pour le sens $\Leftarrow$.
(b) Utiliser le théorème des séries alternées.
- 11** Justifier par l'absurde que $\forall \epsilon > 0, \quad \forall M > 0, \quad \exists x \geq M, \quad xf(x) \leq \epsilon$
- 12** Pour justifier l'égalité des intégrales, on pourra commencer par effectuer le changement de variable $v = \sqrt{4a + x^2}$ dans l'intégrale de h sur $\mathbb{R}_+$. Pour l'intégrale de g , on pourra étudier l'application $x \mapsto x + a/x$ et remarquer qu'elle induit deux bijections, l'une croissante et l'autre décroissante, entre des intervalles à déterminer. On pourra alors séparer l'intégrale en deux et utiliser le changement de variable $t = x + a/x$ en faisant bien attention à l'expression de x en fonction de t suivant l'intervalle sur lequel on travaille.
- 15** (b) Pour $5/2$, utiliser le théorème de convergence dominée. Les $3/2$ peuvent sauter la question et déduire le résultat des questions suivantes.
(c) Poser $u = \sqrt{x}$.
(d) Deviner l'équivalent à l'aide des propriétés de $\arctan$ et du résultat précédent. Pour le justifier correctement, majorer la différence entre I_n et l'équivalent conjecturé.
- 16** (a) Fixer $x > 0$ et justifier l'intégrabilité de $t \mapsto \sin(t)/t^2$ sur $[x; +\infty[$.
(b) Pour l'équivalent en 0, remarquer que $\sin(t)/t^2 \sim 1/t$ en ce point, et se débrouiller pour intégrer (rigoureusement) cet équivalent. Pour l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer un développement asymptotique de F en $+\infty$. On pourra pour cela procéder à des intégrations par parties.
- 17** Considérer $f'\sqrt{f}$ et $\int_0^x f'(x)\sqrt{f(x)} dx$.
- 18** Pour l'intégrabilité de f , une majoration élémentaire suffit. Pour la suite, commencer par intégrer par parties f^2 sur $[0; x]$ puis passer à la limite quand x tend vers $+\infty$ (en justifiant) pour une première égalité. Conclure à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.