

1 _____ (*) _____ **Centrale PC 2010**

Etudier en fonction de $p \in \mathbb{N}$ le caractère $\mathcal{C}^0$ puis le caractère $\mathcal{C}^1$ du prolongement par 0 en $(0, 0)$ de

$$f : (x, y) \mapsto (x + y)^p \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

2 _____ (**) _____ **PC Centrale 2016**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \neq y, \quad F(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

- (a). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
 (b). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que le prolongement continu de F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 _____ (*) _____

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction suivante ait un Laplacien nul

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x/y) \end{aligned}$$

4 _____ (**) _____ **X PC 2009**

Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Justifier l'existence de $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial f}{\partial y}$.

5 _____ (*) _____

Etudier les extremums locaux de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 + 2y^3 + 3x^2$, puis ses extremums globaux sur $[-3; 3]^2$.

6 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' est strictement croissante et que f s'annule en deux points $x_0 < x_1$.

- (a). Montrer que f' s'annule en un unique point et que ce point appartient à $]x_0; x_1[$.
 (b). Soit $g : (x, y) \mapsto \int_x^y f(t) dt$. Etudier les extremums locaux et globaux de g .

7 _____ (*) _____ **Mines PC 2008**

On pose

$$\begin{aligned} f : [0; \pi]^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sin x + \sin y + \sin(x + y) \end{aligned}$$

Trouver les extremums de cette fonction.

8 _____ (*) _____

Soit $\alpha \in]0; 1[$. On note $A = \{(x, y, z), x, y, z \geq 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$. Déterminer les extremums sur A de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \end{aligned}$$

9 _____

Dans le plan affine euclidien, on considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de rayons R et R' , tangents extérieurement en un point U . Un point M décrit $\mathcal{C}$ tandis que qu'un point P décrit $\mathcal{C}'$. Quelle doit être la position de ces points pour obtenir un triangle UMP d'aire maximale ?

Exercices supplémentaires non corrigés

10 _____ (*) _____ **Mines PC 2024**

Déterminer les extremas de $f : (x, y) \mapsto x \ln y - y \ln x$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

11 _____ (**) _____ **Centrale PC 2024**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et $f : \overline{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}(a, r)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(a, r)$. On note Δf le laplacien de f défini par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

- (a). On suppose $\Delta f > 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que f admet un maximum sur $\overline{B}(a, r)$ et que celui-ci ne peut être atteint en un point de $B(a, r)$.
- (b). On suppose $\Delta \geq 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que

$$\sup_{x \in \overline{B}(a, r)} f(x) = \sup_{x \in \partial B(a, r)} f(x)$$

12 _____ (?) _____ **ENS PC 2024**

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 (P(t) - e^t)^2 dt \end{aligned}$$

Montrer que f possède un unique point critique.

13 _____ (?) _____ **PSI X 2024**

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $E_{n,d} = \{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d, i_1 + \dots + i_d = n\}$

et $V_{n,d} = \{f : (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}, (i_1, \dots, i_d) \in E_{n,d}\}$

- (a). Montrer que $V_{n,d}$ forme une famille libre et déterminer son cardinal.

- (b). Déterminer $\text{Ker } \Delta$ avec $\Delta : f \in \text{Vect} E_{n,d} \mapsto \Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

- 1** Calculer les expressions de $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à l'aide des théorèmes généraux puis étudier l'existence d'une limite finie en $(0,0)$.
- 2** Pour l'étude en un point de la forme (x,x) avec $x \in \mathbb{R}$, utiliser les formules de Taylor-Young (pour l'existence des dérivées partielles) et Taylor avec reste intégral (pour la continuité).
- 3** A l'aide de l'hypothèse de Laplacien nul, déterminer une équation différentielle linéaire satisfaite par f .
- 4** Raisonner par analyse-synthèse. On pourra chercher à exprimer f en fonction de u et v à l'aide d'intégrations bien choisies.
- 5** Faire une étude au bord et une étude sur l'intérieur ouvert du domaine.
- 6** (b) A l'aide du (a), déterminer le signe de $f(x)$.
- 7** Déterminer les points critiques dans $]0;\pi[$ puis effectuer une étude de f au bord de son domaine de définition.
- 8** Se ramener à un problème d'extremum pour une fonction de deux variables.
- 9** Introduire un repère judicieux et un paramétrage adapté pour la position des points M et P pour se ramener à un problème d'extremum d'une fonction de plusieurs variables.
- 11** (b) Pour $\epsilon > 0$, considérer $\tilde{f}_\epsilon : x \mapsto f(x) + \epsilon ||x - a||^2$.