CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 2

**PC**

**2024**

4 heures Calculatrice autorisée

**Notations**

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

— La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.

— La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.

— La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.

— La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

— Enfin, la partie V étudie la fonction $\Gamma$. Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de $t$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

## I Résultats préliminaires

***I.A*** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**Q 1.** Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left( \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left( \prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

**Q 2.** Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left( \sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

***I.B*** – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{e}^z$.

**Q 3.** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\left|(1 + t) - \mathrm{e}^t\right| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}.$$

**Q 4.** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.

**Q 5.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.

**Q 6.** Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathrm{e}^z$.

# II Exemples de calcul de produit infini

***II.A*** – **Q 7.** Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et de $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

***II.B*** – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \mathrm{d}u.$$

**Q 8.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

**Q 9.** Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

***II.C*** – On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge.

**Q 10.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\prod_{p=n}^{+\infty}(1-\mathbb{P}(A_p)) = 0$.

On pourra utiliser l'inégalité démontrée en Q 2.

**Q 11.** En déduire que $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1$.

# III Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :

— $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.

— $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$ :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous condition d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

***III.A*** – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction $R_0$.

**Q 12.** Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

**Q 13.** Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

# Somme de projecteurs

## Notations

On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des réels et $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

**Dans tout le problème, $X$ est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et $\mathrm{T}$ un endomorphisme non nul de $X$.**

Soit $\mathscr{B}$ une base de $X$, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note $N(\mathrm{T})$ le noyau de T et $R(\mathrm{T})$ l'image de T.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité.

On appelle projecteur un endomorphisme P de $X$ idempotent, c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On note I l'endomorphisme identité de $X$, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

## 1 Traces et projecteurs

Si $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr} \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Question 1** *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_n$, montrer que* $\operatorname{tr} \mathbb{A}\mathbb{B} = \operatorname{tr} \mathbb{B}\mathbb{A}$.

**Question 2** *Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathscr{B}$.*

On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr} \mathrm{T}$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

Soit P un projecteur de $X$.

**Question 3** *Démontrer que $X = R(\mathrm{P}) \oplus N(\mathrm{P})$.*

**Question 4** *En déduire que* $\operatorname{rg} \mathrm{P} = \operatorname{tr} \mathrm{P}$.

On pose $\mathrm{P}' = \mathrm{I} - \mathrm{P}$.

**Question 5** *Montrer que $R(\mathrm{P}') = N(\mathrm{P})$ et que $R(\mathrm{P}) = N(\mathrm{P}')$.*

**Question 6** *Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces $F$ et $G$ de $X$ est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.*

**Question 7** *Montrer que si l'endomorphisme $\mathrm{S}$ est une somme finie de projecteurs $\mathrm{P}_i$, $i = 1, \ldots, m$, alors $\operatorname{tr}\mathrm{S} \in \mathbf{N}$ et $\operatorname{tr}\mathrm{S} \geq \operatorname{rg}\mathrm{S}$.*

## 2 Projecteurs de rang 1

**On suppose dans cette partie que le rang du projecteur $\mathrm{P}$ est égal à $1$.**

**Question 8** *Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{PTP} = \mu\mathrm{P}$.*

Soit $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de $X$ adaptée à la décomposition

$$X = R(\mathrm{P}) \oplus N(\mathrm{P}).$$

**Question 9** *Montrer que dans la base $\mathscr{C}$ la matrice représentant $\mathrm{T}$ s'écrit*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & \times & \times \\ \hline \times & & \\ \times & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{B}} \end{array}\right], \tag{1}$$

*où $\mu$ est le nombre réel dont l'existence découle de la question **8**, et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.*

**Question 10** *Montrer que si $\mathrm{P'TP'}$ n'est pas proportionnel à $\mathrm{P'}$, alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $\mathrm{P'} = \mathrm{I} - \mathrm{P}$.*

## 3 Endomorphismes différents d'une homothétie

**On suppose dans cette partie que l'endomorphisme $\mathrm{T}$ n'est pas une homothétie.**

**Question 11** *Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $x$ et $\mathrm{T}x$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).*

**Question 12** *Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme suivante :*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \mathbb{A} & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \quad \text{où } \mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}.$$

**Question 13** *En déduire que si* $\operatorname{tr} \mathrm{T}=0$, *il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle la diagonale de* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ *est nulle.*

**Soit** $t_i$, $i=1,\dots,n$ **une suite de** $n$ **nombres réels vérifiant** $\operatorname{tr} \mathrm{T}=\sum_{i=1}^{n} t_i$.

**Question 14** *En dimension* $n=2$, *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* $t_i$, $i=1,2$.

Soit $t \in \mathbf{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur L de $X$ de rang 1, tel que d'une part $\mathrm{LTL}=t\mathrm{L}$ et d'autre part $\mathrm{L}'\mathrm{T}\mathrm{L}'$ ne soit pas proportionnel à $\mathrm{L}'=\mathrm{I}-\mathrm{L}$.

**Question 15** *En dimension* $n \geq 3$, *à l'aide des questions* **9** *et* **10** *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{C}$ *dans laquelle la matrice représentant* T *s'écrit*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}}=\left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \hline \times & & \\ \times & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{B}} \end{array}\right] \text{ où } \mathbb{B} \text{ n'est pas une homothétie.}$$

**Question 16** *En dimension* $n \geq 3$, *démontrer par récurrence qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* $t_i$, $i=1,\dots,n$.

# 4 Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de $X$ vérifiant $\operatorname{tr} \mathrm{T} \in \mathbf{N}$ et $\operatorname{tr} \mathrm{T} \geq \operatorname{rg} \mathrm{T}$. On pose $\rho=\operatorname{rg} \mathrm{T}$ et $\theta=\operatorname{tr} \mathrm{T}$.

**Question 17** *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ *est de la forme suivante :*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right],$$

*où* $\mathbb{T}_1$ *est une matrice de taille* $\rho \times \rho$.

**Supposons tout d'abord que** $\mathbb{T}_1$ **ne soit pas la matrice d'une homothétie**

**Question 18** *A l'aide de la question* **16** *montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}=\left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \times & \cdots & \\ \times & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \mathbb{O} \\ \times & \cdots & \cdots & \end{array}\right] \text{ où les } t_i,\ i=1,\rho \text{ sont des entiers non nuls.}$$

**Question 19** *En déduire que* $\mathrm{T}$ *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

**On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.**

**Question 20** *Démontrer que là encore,* $\mathrm{T}$ *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

## Fin de l'épreuve