I. Introduction d'une fonction auxiliaire

1 En tant que quotient de fonctions indéfiniment dérivables et non nulles sur I, la fonction f l'est aussi. Calculons ses dérivées successives par les règles usuelles de dérivation. Soit $x \in \mathrm{I}$, alors

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - (\sin x + 1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$$

en utilisant l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Il vient de même

$$f''(x) = \frac{\cos^3 x - (\sin x + 1)(-2\sin x \cos x)}{\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x}$$

et $$f^{(3)}(x) = \frac{(2\sin x\cos x + 2\cos x)\cos^3 x - (-3\cos^2 x\ \sin x)(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}{\cos^6 x}$$

Ainsi,
$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) &= \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} \\ f''(x) &= \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{\sin^3 x + 4\sin^2 x + 5\sin x + 2}{\cos^4 x} \end{aligned}}$$

2 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad \exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

est vraie pour tout n entier.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisqu'on a montré à la question 1 que pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\mathrm{P}_0(\sin x)}{(\cos x)^1}$$

avec $\mathrm{P}_0 = 1 + \mathrm{X} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: si l'on suppose que

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos x\, \mathrm{P}_n'(\sin x) \times (\cos x)^{n+1} + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)(\cos x)^n \sin x}{(\cos x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\mathrm{P}_n'(\sin x) \times (\cos x)^2 + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)\sin x}{(\cos x)^{n+2}} \\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{P}_n'(\sin x) \times (1 - \sin^2 x) + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)\sin x}{(\cos x)^{n+2}} \end{aligned}$$

car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On obtient donc $\mathscr{P}(n+1)$ en posant

$$\boxed{\mathrm{P}_{n+1} = (1 - \mathrm{X}^2) \cdot \mathrm{P}_n' + (n+1)\mathrm{P}_n \cdot \mathrm{X}}$$

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}}$$

On peut donc vérifier que les P_n obtenus implicitement à la question 1 sont compatibles avec l'application de la formule de récurrence :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}_0 = \mathrm{X}+1 \\ \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}+1 \\ \mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2+2\mathrm{X}+1 \\ \mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^3+4\mathrm{X}^2+5\mathrm{X}+2 \end{array}}$$

> Lorsque le sujet ne donne pas la réponse attendue à une question, il est utile de vérifier la cohérence de vos réponses dès que possible. Outre l'apport de points en cas de rectification, la simple confirmation est un boost psychologique remotivant.

3 Montrons par récurrence que la propriété

$\mathscr{P}(n)$: « Le polynôme P_n est unitaire, de degré n, et ses coefficients sont des entiers naturels. »

est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathscr{P}(1)$: $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}+1$, ce qui satisfait à toutes les exigences.
- $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que P_n a les propriétés demandées. On peut donc écrire

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^k$$

où les coefficients α_k sont des entiers naturels et $\alpha_n = 1$. Il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} k\,\alpha_k \mathrm{X}^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k \mathrm{X}^{k+1} + (n+1)\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\alpha_{k+1}\mathrm{X}^k + \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)\alpha_k \mathrm{X}^{k+1} \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ dont les coefficients sont des entiers naturels positifs : en effet, $n+1-k \geqslant 0$ pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, tous les autres coefficients étant également positifs d'après l'hypothèse $\mathscr{P}(n)$. Il est de plus unitaire car son coefficient dominant vaut $(n+1-n)\alpha_n = 1$, d'après $\mathscr{P}(n)$.

- Conclusion : on a montré par récurrence que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ le polynôme } \mathrm{P}_n \text{ est unitaire,} \\ \text{de degré } n, \text{ et ses coefficients sont des entiers naturels.}\end{array}}$$

4 On calcule directement, pour $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x)^2 + 1 = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{(\cos x)^2} + \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{2\sin x + 2}{(\cos x)^2}$$

car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, d'où $f(x)^2 + 1 = 2f'(x)$ d'après la question 1. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad 2f'(x) = f(x)^2 + 1}$$

5 D'après la question précédente, pour $x = 0$ qui est bien dans I,

$$2\alpha_1 = 2f'(0) = f(0)^2 + 1 = {\alpha_0}^2 + 1$$

d'où

$$\boxed{2\alpha_1 = {\alpha_0}^2 + 1}$$

Appliquons la formule de Leibnitz au produit $f \cdot f$, à partir de l'égalité obtenue à la question 4. Comme toutes les dérivées de 1 valent 0, il vient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sur tout I,

$$2f^{(n+1)} = (f \cdot f)^{(n)} + 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

En particulier, on peut évaluer cette égalité en 0, d'où l'on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}}$$

III. Permutations alternantes

32 Notons AM_n l'ensemble des permutations alternantes montantes de $[\![1\,;n]\!]$. Compte tenu des définitions, on trouve en listant toutes les permutations

$$\boxed{\begin{array}{cc} \mathrm{AM}_2 = \{(1,2)\} & \mathrm{AM}_3 = \{(1,3,2),(2,3,1)\} \\ \multicolumn{2}{c}{\mathrm{AM}_4 = \left\{ \begin{array}{c} (3,4,1,2),(1,3,2,4),(2,3,1,4), \\ (1,4,2,3),(2,4,1,3), \end{array} \right\}} \end{array}}$$

> Pour $n = 4$, on peut réduire le nombre de permutations à lister en remarquant que 1 est forcément en position 1 ou 3, et 4 est forcément en position 2 ou 4.

33 La fonction

$$\phi \colon \begin{cases} \Omega_n \longrightarrow \Omega_n \\ \sigma \longmapsto \left(\widetilde{\sigma} \colon \begin{cases} \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\} \\ \qquad i \qquad \longmapsto n+1-\sigma(i) \end{cases} \right) \end{cases}$$

transforme une permutation alternante montante (PAM) en une permutation alternante descendante (PAD). En effet, pour σ une PAM, on a

$$\forall i \in \{2,\ldots,n\} \qquad (-1)^i(\sigma(x_i) - \sigma(x_{i-1})) > 0$$

ce qui fait de $\phi(\sigma)$ une PAD, car pour tout $i \in \{2,\ldots,n\}$

$$(-1)^i(\widetilde{\sigma}(x_i) - \widetilde{\sigma}(x_{i-1})) = (-1)^i(n+1-\sigma(x_i) - (n+1-\sigma(x_{i-1}))) < 0$$

De même, ϕ transforme une PAD en PAM. La fonction ϕ étant bijective (d'inverse elle-même), elle fournit une bijection entre les PAM et les PAD. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.}}$$

34 Soit A une partie de $[\![1\,;n]\!]$ à k éléments, notés $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Construire une liste $\mathrm{L} = (x_1, \ldots, x_k)$ de k éléments deux à deux distincts de A revient à choisir une bijection $\sigma : [\![1\,;k]\!] \to [\![1\,;k]\!]$ telle que

$$\forall i \in [\![1\,;k]\!] \qquad x_i = a_{\sigma(i)}$$

Notons alors que la liste $(x_1, \ldots, x_k)$ est alternante montante si et seulement si σ l'est. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Si A est une partie fixée de } k \text{ éléments de } [\![1\,;n]\!]\text{, le nombre de listes alternantes montantes de A est égal à } \beta_k.}$$

35 Pour tout entier n, notons A_n l'ensemble des permutations alternées de $[\![1\,;n]\!]$. Alors A_n est l'union disjointe des permutations alternantes montantes ou descendantes, de sorte que, d'après la question 34

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n = 2\beta_n$$

Soit $n \geqslant 2$. Comme indiqué par l'énoncé, pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, notons $\mathrm{A}_{n+1,k}$ l'ensemble des permutations alternées de $[\![1\,;n+1]\!]$, telles que $\sigma\,(k+1) = n+1$. Ainsi, toujours par union disjointe,

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}_{n+1,k})$$

Soit maintenant σ un élément de $\mathrm{A}_{n+1,k}$ que l'on représente ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n+1 \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) & n+1 & \sigma(k+2) & \cdots & \sigma(n+1) \end{pmatrix}$$

On peut alors remarquer, en notant X l'ensemble $\sigma([\![1\,;k]\!])$, que

- Les listes $\mathrm{L}_g = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ et $\mathrm{L}_d = (\sigma(k+2), \ldots, \sigma(n+1))$ sont des listes alternées d'éléments deux à deux distincts respectivement de X et de $[\![1\,;n]\!] \smallsetminus \mathrm{X}$.
- Puisque $\sigma(k+1) > \sigma(k+2)$, on a $\sigma(k+2) < \sigma(k+3)$, ce qui prouve que L_d est une liste alternante montante.
- Puisque $\sigma(k+1) > \sigma(k)$, on a $\sigma(k) < \sigma(k-1)$, ce qui prouve que L_g est montante si k est pair, descendante sinon.

On peut alors associer à σ le triplet $(\mathrm{X}, \mathrm{L}_g, \mathrm{L}_d)$ où X est l'ensemble non ordonné des éléments $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$ qui est une partie à k éléments de $[\![1\,;n]\!]$. L'application ainsi définie est clairement bijective. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour X, β_k choix pour L_g et β_{n-k} choix pour L_d, d'après la question précédente. Ainsi,

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_{n+1,k} = \binom{n}{k} \cdot \beta_k \cdot \beta_{n-k}$$

d'où
$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad 2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}}$$

36 D'après les questions 5 et 35, les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ satisfont la même relation de récurrence. Comme de plus $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, elles sont égales.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \beta_n = \alpha_n}$$