

PARTIE I

I.1 Soient $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors d'une part, $M^\top SM$ est symétrique

$${}^\top(M^\top SM) = M^\top S^\top {}^\top(M^\top) = M^\top SM$$

D'autre part, $M^\top SM$ est positive. En effet, en posant $Y = MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes

$$X^\top (M^\top SM) X = ({}^\top MX) S (MX) = Y^\top SY$$

c'est-à-dire

$$X^\top (M^\top SM) X \geq 0$$

par positivité de S

Finalement,

$$M^\top SM \in \mathcal{S}_n^+$$

I.2 Puisque S est une matrice symétrique, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $S = PDP^{-1} = PDP^\top$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S , notées ici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} X^\top SX &= X^\top PDP^\top X \\ &= {}^\top(P^\top X) D P^\top X \\ X^\top SX &= Y^\top DY \end{aligned}$$

on a posé $Y = P^\top X$. Si Y s'écrit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors :

$$X^\top SX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

Si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = X^\top SX \geq 0$ donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives et si $X \neq 0$, alors $Y = P^\top X \neq 0$ (car $P^\top$ est inversible) et donc $X^\top SX > 0$. Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on pose $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et en prenant $X = Pe_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $Y = e_i$ et $X^\top SX = \lambda_i \geq 0$. Donc toutes les valeurs propres de S sont positives. De plus, si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, par le même calcul, $X^\top SX = \lambda_i > 0$ et les valeurs propres de S sont strictement positives.

$S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

I.3 La matrice A est clairement symétrique. Son polynôme caractéristique est

$$P_A = \det(A - XI_2) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 3X + 1$$

Les valeurs propres de A , racines du polynôme caractéristique, sont donc $(3 + \sqrt{5})/2$ et $(3 - \sqrt{5})/2$. Comme $\sqrt{5} < 3$, elles sont toutes les deux strictement positives. La question I.2 permet de conclure que

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et a fortiori } A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$, on peut calculer directement

$$X^T A X = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$$

donc A est symétrique définie positive.

Un troisième méthode serait la suivante. Dans un premier temps, remarquer que A est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée. Notons λ et μ ses valeurs propres, sans chercher à les calculer. On sait que ce sont des réels non nécessairement distincts, qui vérifient $\text{tr}(A) = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu$. Le calcul du déterminant $\det(A)$ montre qu'il est strictement positif et celui de la trace $\text{tr}(A) = 2 + 1 \geq 0$. Ceci entraîne d'une part que les deux valeurs propres vérifient $\lambda\mu > 0$. Elles sont donc du même signe et d'autre part $\lambda + \mu \geq 0$ montre que ce signe est positif. On conclut alors à l'aide la question I.2.

I.4 La matrice B est symétrique. En posant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on remarque que

$$X^T B X = -1 < 0$$

Donc

$$B \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{ a fortiori } B \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

On peut aussi utiliser la question I.2 et dire que -1 étant valeur propre « évidente », B ne peut être définie positive.

I.5 Soient $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui lui est semblable. Alors S et T ont mêmes valeurs propres et, d'après la question I.2, toutes ces valeurs propres sont positives.

$$T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

I.6.a Soient $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ : $MX = \lambda X$. La matrice M étant inversible et X non nul, $MX \neq 0$. Par suite, $\lambda X \neq 0$ et donc $\lambda \neq 0$. On peut écrire $X = \lambda M^{-1}X$, puis

$$M^{-1}X = \lambda^{-1}X$$

Le vecteur X étant non nul,

$$X \text{ est vecteur propre de } M^{-1} \text{ associé à la valeur propre } \lambda^{-1}.$$

On en déduit que, en notant $\text{Sp}(M)$ le spectre de M

$$\{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\} \subset \text{Sp}(M^{-1})$$

Réciproquement, si $\mu \in \text{Sp}(M^{-1})$, on obtient de même que $\mu^{-1} \in \text{Sp}(M)$ et

$$\text{Sp}(M^{-1}) \subset \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\}$$

Finalement

$$\text{Sp}(M^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\}$$

I.6.b Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après la question I.2, S a toutes ses valeurs propres strictement positives. Comme 0 n'est pas valeur propre de S , on a nécessairement $\text{rg}(S) = n$ et par suite

S est inversible.

On a $(^T S^{-1}) = (S^T)^{-1} = S^{-1}$ donc $S^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La question I.6.a permet d'affirmer que toutes les valeurs propres de S s'écrivent comme inverses de réels strictement positifs et sont donc toutes strictement positives. Finalement, d'après la question I.2,

$S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

I.7 Soient λ une valeur propre de S et $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Nécessairement $\|X\| \neq 0$ et

$$0 = X^T S X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$$

ce qui montre que $\lambda = 0$.

Toutes les valeurs propres de S sont nulles.

Comme S est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont nulles, S est semblable à la matrice nulle. Elle est donc identiquement nulle. On en déduit que

Si $X^T S X = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $S = 0$

Comme le montre l'exemple de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il existe des matrices non nulles qui admettent 0 pour seule valeur propre. Évidemment, ces matrices ne sont pas diagonalisables.

Voici une autre preuve possible. Posons $S = (s_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ et $X = e_i$, où $(e_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $X^T S X = s_{i,i} = 0$. Si on pose $Y = e_i + e_j$, avec $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, $i \neq j$,

$$Y^T S Y = s_{i,i} + 2s_{i,j} + s_{j,j} = 0$$

ce qui donne $s_{i,j} = 0$ et montre directement que $S = 0$.

I.8.a Supposons que $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifient $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$. Par définition,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T (S_2 - S_1) X \geq 0$$

$$\text{et} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T (S_1 - S_2) X \geq 0 \quad \text{soit} \quad X^T (S_2 - S_1) X \leq 0$$

$$\text{ce qui donne} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T (S_2 - S_1) X = 0$$

Or, d'après la question I.7, cela implique $S_2 - S_1 = 0$ puisque $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Si $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$, alors $S_1 = S_2$

I.8.b Prenons par exemple $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices ont pour valeurs propres 1 et 2, toutes positives donc d'après la question I.2, elles sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Or,

$$S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{d'après la question I.2}$$

$$S_1 - S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{d'après la question I.2}$$

On n'a pas nécessairement $S_1 \leq S_2$ ou $S_2 \leq S_1$.

I.8.c Prenons $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $S_1 \neq S_2$, $S_1 \leq S_2$ car

$$S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Pourtant $S_2 - S_1 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on ne peut pas écrire $S_1 < S_2$.

On n'a pas nécessairement $S_1 < S_2$ si $S_1 \leq S_2$ et $S_1 \neq S_2$.

I.8.d D'après la question I.2, les valeurs propres de $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sont toutes positives. Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha S_2 - \alpha S_1$ est symétrique et son polynôme caractéristique $\det(\alpha(S_2 - S_1) - \lambda I_n) = \alpha^n \det(S_2 - S_1 - \lambda \alpha^{-1} I_n)$. Ceci montre que

$$\text{Sp}(\alpha S_2 - \alpha S_1) = \{\alpha \lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(S_2 - S_1)\}$$

relation encore valable si $\alpha = 0$. Ainsi,

Si $\alpha \geq 0$, $\alpha S_1 \leq \alpha S_2$.

Si $\alpha < 0$, comme les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes positives, on en déduit que les valeurs propres de $\alpha(S_2 - S_1)$ sont toutes négatives. Les valeurs propres de $\alpha S_1 - \alpha S_2$ sont donc positives, ce qui montre que

Si $\alpha < 0$, $\alpha S_2 \leq \alpha S_1$.

I.8.e Si $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a immédiatement

$$(S_2 + S) - (S_1 + S) = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Si $S_1 \leq S_2$, on a $S + S_1 \leq S + S_2$ pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.9 Par hypothèse, on a $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. La question I.1 permet d'affirmer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^\top (S_2 - S_1) M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc

$$M^\top S_2 M - M^\top S_1 M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

et

$M^\top S_1 M \leq M^\top S_2 M$

Résumons ici les propriétés que l'on a montré concernant la relation $\leq$ sur les matrices symétriques. La question I.8.a montre que cette relation est antisymétrique. Le lecteur avisé peut montrer qu'elle est aussi réflexive et transitive, c'est-à-dire que c'est une relation d'ordre. La question I.8.b montre que l'ordre est partiel, et I.8.c) que $<$ n'est pas l'ordre strict induit par $\leq$. Les questions I.8.d et I.8.e montrent que $\leq$ est stable par somme et multiplication par un scalaire positif, tandis que la question I.9 montre la compatibilité vis-à-vis de la relation de congruence.

I.10.a Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a $SX = \lambda X$ donc $(S - I_n)X = (\lambda - 1)X$. Ainsi $\lambda - 1$ est valeur propre de $S - I_n$ qui est une matrice positive par hypothèse. D'après la question I.2, on en déduit que $\lambda - 1 \geq 0$, c'est-à-dire

Les valeurs propres de S sont dans $[1; +\infty[$

Comme 0 n'est pas valeur propre de S , on en déduit que

S est inversible.

I.10.b D'après la question I.6.a, les valeurs propres de S^{-1} sont les inverses des valeurs propres de S . D'après la question I.10.a, $\text{Sp}(S) \subset [1; +\infty[$, et nécessairement

Les valeurs propres de S^{-1} sont dans $]0; 1]$

En particulier, S^{-1} est définie positive d'après la question I.2, et $0 < S^{-1}$.

Tout d'abord $(I_n - S^{-1})^T = I_n^T - (S^{-1})^T = I_n - (S^T)^{-1} = I_n - S^{-1}$ donc la matrice $I_n - S^{-1}$ est symétrique. Si λ est valeur propre de $I_n - S^{-1}$ pour un vecteur propre X ,

$$(I_n - S^{-1})X = \lambda X \quad \Longleftrightarrow \quad S^{-1}X = (1 - \lambda)X$$

donc $1 - \lambda$ est valeur propre de S^{-1} . Ainsi $0 < 1 - \lambda \leq 1$ donc $\lambda \geq 0$. Puisque les valeurs propres de $I_n - S^{-1}$ sont positives, d'après la question I.2, $I_n - S^{-1} \geq 0$ d'où

$$\text{Sp}(I_n - S^{-1}) = \{1 - \lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp}(S)\} \subset \mathbb{R}_+$$

ce qui montre, d'après la question I.2 que la matrice symétrique $I_n - S^{-1}$ est positive. Finalement,

$$0 < S^{-1} \leq I_n$$

I.11.a On a déjà $({}^T M^T M) = M^T ({}^T M^T) = M^T M$

donc la matrice S est symétrique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, un vecteur propre de $M^T M$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors d'une part,

$$X^T M^T M X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$$

d'autre part, $X^T M^T M X = ({}^T M X)(M X) = \|M X\|^2$

d'où $\lambda \|X\|^2 = \|M X\|^2$

Comme $\|X\| \neq 0$ et M est inversible, $\|M X\| \neq 0$ et, nécessairement, $\lambda > 0$. D'après la question I.2

$$M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

I.11.b Soit $S = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients diagonaux de S étant aussi ses valeurs propres, on a $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ d'après la question I.2. Posons $M = \text{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$. Alors M est symétrique, ses valeurs propres sont strictement positives, donc $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, a fortiori M est inversible et $M^\top M = S$.

Si S est diagonale et définie positive, il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M^\top M = S$.

I.11.c Supposons que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le rappel, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec $S = PDP^{-1}$ et D une matrice diagonale, dont tous les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S . D'après la question I.2, ils sont strictement positifs. D'après la question I.11.b, on peut écrire $D = M^\top M$ avec M une matrice inversible. Comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = P^\top$ et

$$S = PM^\top MP^\top = ({}^\top MP^\top)(MP^\top)$$

Posons $N = MP^\top$. Alors N est inversible comme produit de matrices inversibles, et $S = N^\top N$.

Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = N^\top N$.

I.12 Par hypothèse, on a $M_1^\top M_1 \leq S_2$. Appliquons le résultat de la question I.9 avec la matrice M_1^{-1}

$$(M_1^{-1})^\top M_1^\top M_1 M_1^{-1} \leq (M_1^{-1})^\top S_2 M_1^{-1}$$

et

$$I_n \leq M_1^{-1\top} S_2 M_1^{-1}$$

On sait alors, comme conséquence de la question I.10.a, que $M_1^{-1\top} S_2 M_1^{-1}$ est inversible. Ceci permet d'affirmer que $\det(M_1^{-1\top} S_2 M_1^{-1}) = \det(S_2) \det(M_1^{-1})^2 \neq 0$ donc $\det(S_2) \neq 0$ et finalement

S_2 est inversible.

Appliquons alors le résultat de la question I.10.b à la matrice $M_1^{-1\top} S_2 M_1^{-1}$: on obtient $M_1 S_2^{-1} M_1^\top \leq I_n$. Appliquons à la matrice $M_1 S_2^{-1} M_1^\top$ la formule obtenue à la question I.9,

$$S_2^{-1} \leq M_1^{-1} (M_1^{-1})^\top = (M_1^\top M_1)^{-1} = S_1^{-1}$$

On a bien

$$S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$$

PARTIE II

II.1.a Procédons par analyse/synthèse. Supposons qu'il existe des matrices P_1 et P_2 telles que

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases}$$

On résout le système par élimination : tout d'abord, $\lambda_1 I_n = \lambda_1 P_1 + \lambda_1 P_2$, puis, $S - \lambda_1 I_n = (\lambda_2 - \lambda_1)P_2$. Comme par hypothèse $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$P_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(S - \lambda_1 I_n)$$

De manière analogue, $S - \lambda_2 I_n = (\lambda_1 - \lambda_2)P_1$ et

$$P_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S - \lambda_2 I_n)$$

Ainsi, si (P_1, P_2) est solution du système, on a montré que P_1 était nécessairement égal à la matrice $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S - \lambda_2 I_n)$, et que P_2 était nécessairement égal à la matrice $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(S - \lambda_1 I_n)$. On a donc prouvé l'unicité, en supposant l'existence, des solutions du système. Les expressions que l'on obtient vont maintenant nous servir pour montrer l'existence des solutions.

Réciproquement, posons $P_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S - \lambda_2 I_n)$ et $P_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(S - \lambda_1 I_n)$. On vérifie facilement que $P_1 + P_2 = I_n$ et que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = S$. De plus, les matrices P_1 et P_2 ainsi définies sont symétriques, car S et I_n le sont et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

$$P_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S - \lambda_2 I_n) \text{ et } P_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(S - \lambda_1 I_n) \text{ sont les seules matrices vérifiant } P_1 + P_2 = I_n \text{ et } \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = S.$$

II.1.b D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S - \lambda_2 I_n) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(P \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}})P^{-1} - \lambda_2 PP^{-1}) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}P(\text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}) - \lambda_2 I_n)P^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}P(\text{diag}(\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_1 - \lambda_2}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2 \text{ fois}}))P^{-1} \\ P_1 &= P \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2 \text{ fois}})P^{-1} \end{aligned}$$

De même $P^{-1}P_2P = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_2 \text{ fois}})$, et donc :

$$P_1 = P \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2 \text{ fois}})P^{-1} \quad \text{et} \quad P_2 = P \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_2 \text{ fois}})P^{-1}$$

Posons $D_1 = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2 \text{ fois}})$ et $D_2 = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_2 \text{ fois}})$

Comme $D_1^2 = D_1$ et $D_1 D_2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{on a} \quad P_1^2 &= P D_1 P^{-1} P D_1 P^{-1} \\ &= P D_1^2 P^{-1} \\ &= P D_1 P^{-1} \\ P_1^2 &= P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad P_1 P_2 &= P D_1 P^{-1} P D_2 P^{-1} \\ &= P D_1 D_2 P^{-1} \\ P_1 P_2 &= 0 \end{aligned}$$

De même, $P_2^2 = P_2$ et $P_2 P_1 = 0$. Finalement

$$P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2 \text{ et } P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$$

De plus, si on note $\text{rg}(D_1)$ le rang de D_1 , on a $\text{rg}(D_1) = n_1$, $\text{rg}(D_2) = n_2$ et on sait que deux matrices semblables ont même rang. Ceci nous permet d'affirmer

$$\text{rg}(P_1) = n_1 \quad \text{et} \quad \text{rg}(P_2) = n_2$$

II.1.c On a déjà $S^0 = I_n = P_1 + P_2$ par hypothèse. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question II.1.b, on a $P_1 P_2 = P_2 P_1$, ce qui permet d'appliquer la formule du binôme de Newton

$$S^k = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \lambda_1^p P_1^p \lambda_2^{k-p} P_2^{k-p}$$

En utilisant le fait que $P_1 P_2 = 0$, on en déduit que les produits $P_1^p P_2^{k-p}$ sont nuls dès que $p \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$. Ainsi :

$$S^k = \lambda_1^k P_1^k + \lambda_2^k P_2^k$$

Soit maintenant $Q = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. En substituant la matrice S à l'indéterminée X , on obtient d'après le résultat précédent

$$\begin{aligned} Q(S) &= \sum_{k=0}^N (a_k \lambda_1^k P_1^k + \lambda_2^k P_2^k) \\ &= \sum_{k=0}^N a_k \lambda_1^k P_1^k + \sum_{k=0}^N a_k \lambda_2^k P_2^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^N a_k \lambda_1^k \right) P_1 + \left(\sum_{k=0}^N a_k \lambda_2^k \right) P_2 \end{aligned}$$

$$Q(S) = Q(\lambda_1) P_1 + Q(\lambda_2) P_2$$

II.1.d Notons $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. On a l'égalité

$$S_0 - I_n = J$$

La matrice J est de rang 1, donc admet 0 pour valeur propre avec multiplicité $n - 1$. Par ailleurs, le vecteur ${}^t(1, \dots, 1)$ est vecteur propre de J , associé à la valeur propre n . La somme des multiplicités des valeurs propres étant égale à la dimension de l'espace, n est nécessairement valeur propre de multiplicité 1. Comme $S_0 = J + I_n$, on en déduit

$$\text{Sp}(S_0) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = n + 1\}, \text{ de plus } n_1 = n - 1 \text{ et } n_2 = 1$$

Les formules trouvées à la question II.1.a nous donnent

$$P_1 = \frac{-1}{n}(S_0 - (n + 1)I_n) \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{n}(S_0 - I_n)$$

II.2.a Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ leurs matrices associées dans la base canonique. On a $(x | y) = X^\top Y$. Comme SX et SY sont les matrices associées à $u(x)$ et $u(y)$ dans la base canonique et, en utilisant le fait que $S^\top = S$:

$$\begin{aligned} (u(x) | y) &= (SX)^\top Y \\ &= X^\top S^\top Y \\ &= X^\top (SY) \\ (u(x) | y) &= (x | u(y)) \end{aligned} \quad \text{car } S^\top = S$$

Ainsi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (u(x) | y) = (x | u(y))$$

II.2.b Soient $x \in E_i$ et $y \in E_j$ non nuls. Alors $u(x) = \lambda_i x$, $u(y) = \lambda_j y$. D'une part,

$$(u(x) | y) = \lambda_i (x | y)$$

D'autre part, d'après la question II.2.a

$$(u(x) | y) = (x | u(y)) = \lambda_j (x | y)$$

Ainsi,

$$(\lambda_i - \lambda_j)(x | y) = 0$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ par hypothèse, on en déduit que

$$\forall x \in E_i \quad \forall y \in E_j \quad (x | y) = 0$$

$$\text{Pour tout } (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 \text{ avec } i \neq j, E_i \text{ et } E_j \text{ sont orthogonaux.}$$

D'après le cours, la matrice S est diagonalisable donc l'endomorphisme u l'est également. Ce qui permet d'affirmer que

$$\bigoplus_{i=1}^p E_i = \mathbb{R}^n$$

II.2.c Montrons i). Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. D'après la question I.2.b, on peut écrire

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_i. \text{ Ainsi } x, y \text{ s'écrivent de manière unique } x = \sum_{i=1}^p x_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^p y_i \text{ avec}$$

pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ $x_i \in E_i$ et $y_i \in E_i$. Par définition de p_i , $p_i(x) = x_i$ et $p_i(x_j) = 0$ si $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ et $i \neq j$. La bilinéarité du produit scalaire et le résultat de la question II.2.b nous permettent d'écrire que

$$\begin{aligned}
 (p_i(x) \mid y) &= \left(x_i \mid \sum_{j=1}^p y_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^p (x_i \mid y_j) \\
 (p_i(x) \mid y) &= (x_i \mid y_i)
 \end{aligned}$$

Le même calcul fournit $(x \mid p_i(y)) = (x_i \mid y_i)$, et donc

$$(p_i(x) \mid y) = (x \mid p_i(y))$$

L'endomorphisme p_i est donc symétrique et sa matrice dans une base orthonormée quelconque l'est aussi. En particulier sa matrice dans la base canonique l'est.

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad P_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$$

Montrons ii). D'après la question II.2.b si $i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $i \neq j$, alors E_i et E_j sont orthogonaux. Mais, par définition de p_i , $E_i = \text{Im } p_i$ et $\text{Ker } p_i = \text{Im } p_i^\perp = E_i^\perp$. Comme $E_i \perp E_j$, on a $E_j \subset \text{Ker } p_i$. On peut donc dire que $\text{Im } p_j \subset \text{Ker } p_i$. Ainsi, pour tout $x \in E$, puisque $p_j(x) \in \text{Im } p_j$, $p_j(x) \in \text{Ker } p_i$, donc $p_i(p_j(x)) = 0$. On vient de démontrer que $p_i \circ p_j = 0$. En terme de matrices,

$$\boxed{\forall i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad i \neq j \quad P_i P_j = 0}$$

II.2.d On sait d'après la question II.2.b que $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^p x_i$ où $x_i \in E_i$. Par définition des p_i , on a $p_i(x) = x_i$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x = \sum_{i=1}^p p_i(x) = \left(\sum_{i=1}^p p_i \right) (x)$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^p p_i = \text{Id}$ et en terme de matrices

$$\boxed{\sum_{i=1}^p P_i = I_n}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on peut écrire $SX = S \left(\sum_{i=1}^p P_i X \right)$ et comme $P_i X$ est par définition de p_i vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_i , on a

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad S P_i X = \lambda_i P_i X$$

c'est-à-dire $SX = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i X$ et

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i}$$

La question II.1.a a montré l'existence et l'unicité de la décomposition spectrale dans le cas où $n = 2$.

II.3.a D'après la question II.2.d et la définition de $f(S)$, on a

$$Sf(S) = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i \right) \left(\sum_{j=1}^p f(\lambda_j) P_j \right) = \sum_{i,j=1}^p \lambda_i f(\lambda_j) P_i P_j$$

Mais d'après la question II.2.c $P_i P_j = 0$. On en déduit que

$$Sf(S) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i) P_i^2$$

Or $P_i^2 = P_i$ car P_i est la matrice de la projection p_i . Donc

$$Sf(S) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i) P_i$$

Un calcul analogue donne $f(S)S$ et finalement

$$Sf(S) = f(S)S = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i) P_i$$

II.3.b Soit X un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_k . Par définition de p_k , on a $P_k X = X$ et $P_i X = 0$ si $i \neq k$. En utilisant la définition de $f(S)$, on obtient

$$f(S)X = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) P_i X = f(\lambda_k) P_k X = f(\lambda_k) X$$

X est vecteur propre pour $f(S)$ associé à la valeur propre $f(\lambda_k)$

II.3.c D'après la question II.1.d, la décomposition spectrale de S_0 est

$$S_0 = (n-1) \times \frac{-1}{n} (S_0 - (n+1)I_n) + 1 \times \frac{1}{n} (S_0 - I_n)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \cos(\pi S_0) &= \cos(\pi(n-1)) \frac{-1}{n} (S_0 - (n+1)I_n) + \cos(\pi) \frac{1}{n} (S_0 - I_n) \\ \cos(\pi S_0) &= (-1)^n \frac{1}{n} (S_0 - (n+1)I_n) - \frac{1}{n} (S_0 - I_n) \end{aligned}$$

Distinguons le résultat suivant la parité de n :

$$\cos(\pi S_0) = \begin{cases} -I_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+2}{n} I_n - \frac{2}{n} S_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II.4.a La matrice $g(S)$ est correctement définie si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont dans $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire d'après la question I.2 si et seulement si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, toutes les valeurs propres de S sont strictement positives d'après la question I.2, et l'on peut définir $g(S)$.

$g(S)$ est bien définie si et seulement si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, S est inversible et d'après la question II.2.d

$$Sg(S) = g(S)S = \sum_{i=1}^p \lambda_i \lambda_i^{-1} P_i = \sum_{i=1}^p P_i = I_n$$

cette dernière égalité découlant de la question II.2.d.

$$\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad g(S) = S^{-1}$$

Il découle alors de la question I.12 que

La fonction g est matriciellement décroissante.

II.4.b De même qu'à la question précédente, la matrice $h(S)$ est définie si et seulement si $\text{Sp}(S) \subset]-1; +\infty]$ c'est-à-dire si et seulement si $-I_n < S$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} h(S) &= \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} P_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda_i} \right) P_i \\ &= \sum_{i=1}^p P_i - \sum_{i=1}^p \frac{1}{1 + \lambda_i} P_i \\ h(S) &= I_n - (S + I_n)^{-1} \end{aligned}$$

où la dernière égalité est conséquence de la question II.4.a, appliquée à $S + I_n$.

$$\boxed{h(S) = I_n - (S + I_n)^{-1}}$$

On peut aussi vérifier directement que $(S + I_n)$ et $I_n - h(S)$ sont inverses l'une de l'autre.

Supposons que $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $-I_n < S_1 \leq S_2$. Alors $S_1 + I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $S_1 + I_n > 0$. On a les inégalités :

$$\begin{aligned} S_1 + I_n &\leq S_2 + I_n && \text{d'après la question I.8.e} \\ (S_2 + I_n)^{-1} &\leq (S_1 + I_n)^{-1} && \text{d'après la question I.12} \\ -(S_1 + I_n)^{-1} &\leq -(S_2 + I_n)^{-1} && \text{avec la question I.8 d} \\ I_n - (S_1 + I_n)^{-1} &\leq I_n - (S_2 + I_n)^{-1} && \text{en réutilisant I.8 e} \\ h(S_1) &\leq h(S_2) \end{aligned}$$

La fonction h est matriciellement croissante.

II.5.a Le polynôme caractéristique de $A(x) - B(x)$ est

$$\begin{aligned} P(X) &= \det(A(x) - B(x) - XI_n) \\ &= \begin{vmatrix} \text{ch } x - X & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x - \frac{1}{\text{ch } x} - X \end{vmatrix} \\ &= X^2 - 2 \text{ch } x X + \frac{1}{\text{ch } x} X - 1 + \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x \\ &= X \left(X - 2 \text{ch } x + \frac{1}{\text{ch } x} \right) \\ P(X) &= X \left(X - \frac{\text{ch } 2x}{\text{ch } x} \right) \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de $A(x) - B(x)$ sont 0 et $\frac{\text{ch } 2x}{\text{ch } x}$. Comme elles sont positives, d'après la question I.2, $A(x) - B(x) \geq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) \leq A(x)$.

II.5.b Le polynôme caractéristique de $A(x)$ est

$$X^2 - 2 \operatorname{ch} x X + 1 = (X - e^x)(X - e^{-x})$$

on a donc

$$\lambda_1 = e^x \quad \text{et} \quad \lambda_2 = e^{-x}$$

Ces deux valeurs propres sont distinctes si et seulement si $x \neq 0$. On peut alors utiliser le résultat de la question II.1.a avec $n_1 = n_2 = 1$.

Les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et à λ_2 car $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}A(x)P = e^x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit la décomposition spectrale de $A(x)$

$$A(x) = e^x P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + e^{-x} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Par le calcul, on trouve $P_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $P_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

II.5.c Traitons le cas $x = 0$: $A(0) = I_2$ est sa propre décomposition spectrale et $p_\alpha(A(x)) = p_\alpha(1)I_2 = I_2$, et $A(\alpha x) = A(0) = I_2$.

Soit maintenant $x \neq 0$. Comme $e^{-x} > 0$ et $e^x > 0$, $p_\alpha(A(x))$ est correctement définie. Le résultat de la question II.5.b donne

$$\begin{aligned} p_\alpha(A(x)) &= e^{\alpha x} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + e^{-\alpha x} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \left(e^{\alpha x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-\alpha x} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\ p_\alpha(A(x)) &= P \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha x} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

En outre,

$$P^{-1}A(\alpha x)P = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha x} \end{pmatrix}$$

en utilisant la question précédente avec $\alpha x > 0$. Ainsi $P^{-1}A(\alpha x)P = P^{-1}p_\alpha(A(x))P$ et, dans tous les cas,

$$\boxed{p_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)}$$

II.5.d La matrice $B(x)$ est diagonale, on a donc immédiatement sa décomposition spectrale qui est

$$B(x) = 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\operatorname{ch} x} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{p_\alpha(B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^\alpha} \end{pmatrix}}$$

II.5.e On a $\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \alpha x & \operatorname{sh} \alpha x \\ \operatorname{sh} \alpha x & \operatorname{ch} \alpha x - \frac{1}{\operatorname{ch}^\alpha x} \end{vmatrix}$

$$= \operatorname{ch}^2 \alpha x - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch}^\alpha x} - \operatorname{sh}^2 \alpha x$$

$$\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] = 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch}^\alpha x}$$

$$\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] = \frac{\operatorname{ch}^\alpha x - \operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch}^\alpha x}$$

Calculons un développement limité de cette expression au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] &= \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^\alpha - (1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2))}{1 + o(1)} \\ &= 1 + \frac{\alpha}{2} x^2 - 1 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 + o(x^2) \\ \det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] &= \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] \sim \frac{1}{2} \alpha(1 - \alpha) x^2$$

Supposons que $\alpha > 1$. Dans ce cas $\alpha(1 - \alpha) < 0$ et $\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] < 0$ pour x proche de 0. Soit x_0 un réel tel que $\det[p_\alpha(A(x_0)) - p_\alpha(B(x_0))] < 0$. Or, comme $A(x_0) - B(x_0) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, cette matrice est diagonalisable. Son déterminant est donc le produit de ses valeurs propres. Ainsi, le produit des deux valeurs propres de $A(x_0) - B(x_0)$ est négatif. Ces deux valeurs propres ne peuvent pas être positives simultanément. En particulier, on n'a pas $p_\alpha(A(x_0)) \leq p_\alpha(B(x_0))$, et

$$p_\alpha \text{ n'est pas matriciellement croissante.}$$

L'argument ci-dessus montre aussi que les valeurs propres de $A(x_0) - B(x_0)$ ne sont pas non plus simultanément négatives, ce qui montre que p_α n'est pas matriciellement décroissante.

PARTIE III

III.1.a Soit $t \in I$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$X^\top A(t)X = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t)x_i x_j$$

La fonction $t \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t)x_i x_j$ est combinaison linéaire des fonctions intégrables sur I $a_{i,j}$, donc intégrable sur I et, par linéarité de l'intégrale

$$\int_I X^\top A(t)X \, dt = \sum_{i,j=1}^n \left(\int_I a_{i,j}(t) \, dt \right) x_i x_j = X^\top \left(\int_I A(t) \, dt \right) X$$

par définition de $\int_I A(t) \, dt$.

$$t \mapsto X^\top A(t)X \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \int_I X^\top A(t)X \, dt = X^\top \left(\int_I A(t) \, dt \right) X$$

III.1.b Posons $A(t) = f(t)M$ avec $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ et $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$. Pour $i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket$ fixés, $a_{i,j} : t \mapsto f(t)m_{i,j}$ est intégrable sur I , ce qui prouve que

$$\int_I f(t)M \, dt \text{ existe}$$

Par linéarité, on a $\int_I f(t)m_{i,j} \, dt = \left(\int_I f(t) \, dt \right) m_{i,j}$. Par définition de $\int_I f(t)M \, dt$,

$$\int_I f(t)M \, dt = \left(\int_I f(t) \, dt \right) M$$

III.2.a Soit $\alpha \in]0;1[$ fixé. Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{x}{(1+xt)t^\alpha}$ est définie, continue et positive sur $]0;+\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. On va étudier son comportement en 0 et $+\infty$ à l'aide d'équivalents. En 0,

$$f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{t^\alpha}$$

Comme $\alpha \in]0;1[$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0;1[$. L'intégrabilité de f_x sur $]0;1[$ en découle, par comparaison entre fonctions positives. En $+\infty$,

$$f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

et $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, car $\alpha+1 > 1$. Ce qui montre que f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$. Finalement f_x est intégrable sur $[0;+\infty[$ et

$$\text{Pour tout } x > 0 \text{ } F(x) \text{ existe.}$$

III.2.b Fixons $x > 0$. Dans ce cas l'application $t \mapsto xt$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Le changement de variable $u = xt$, $du = x dt$ est possible dans l'intégrale généralisée définissant $F(x)$. On a

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt = x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha} = Cx^\alpha$$

Avec $C = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha}$. La fonction $u \mapsto \frac{1}{(1+u)u^\alpha}$ est continue, strictement positive, indépendante de x et intégrable d'après le théorème de changement de variable. Il en résulte que $C > 0$ et donc

$$\boxed{\text{Il existe une constante } C > 0 \text{ telle que pour tout } x > 0 \text{ } F(x) = Cx^\alpha}$$

III.2.c La matrice S est définie positive. Soit $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ sa décomposition spectrale. On peut appliquer le résultat de la question II.4.a

$$g(S) = S^{-1} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^{-1} P_i$$

Par définition de la décomposition spectrale, on a $I_n = \sum_{i=1}^p P_i$ et pour tout $t > 0$, $tI_n = \sum_{i=1}^p tP_i$. Ce qui donne

$$S^{-1} + tI_n = \sum_{i=1}^p (\lambda_i^{-1} + t) P_i$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ $\lambda_i > 0$ donc $\lambda_i^{-1} + t > 0$ et la question I.2 montre que $S^{-1} + tI_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ce qui permet d'appliquer de nouveau la question II.4.a

$$\begin{aligned} (S^{-1} + tI_n)^{-1} &= g(S^{-1} + tI_n) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i^{-1} + t} P_i \\ (S^{-1} + tI_n)^{-1} &= \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i} P_i \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{S^{-1} + tI_n \text{ est inversible et } (S^{-1} + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i} P_i}$

III.2.d La matrice $F(S)$ est bien définie car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et F est définie sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} F(S) &= \sum_{i=1}^p F(\lambda_i) P_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i t) t^\alpha} dt \right) P_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i dt \right) \quad \text{d'après la question III.1.b} \\ F(S) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i \right) dt \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en permutant $\int_0^{+\infty}$ avec la somme finie $\sum_{i=1}^p$. En utilisant le résultat de la question III.2.c, on a

$$\boxed{F(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (S^{-1} + tI_n)^{-1} dt}$$

III.2.e Soit $t > 0$. Alors $tI_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a les inégalités suivantes

$$B^{-1} \leq A^{-1} \quad \text{d'après la question I.12}$$

$$B^{-1} + tI_n \leq A^{-1} + tI_n \quad \text{d'après la question I.8.e}$$

$$(A^{-1} + tI_n)^{-1} \leq (B^{-1} + tI_n)^{-1} \quad \text{d'après la question I.12}$$

Ainsi, $(B^{-1} + tI_n)^{-1} - (A^{-1} + tI_n)^{-1} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Ce qui donne

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^\top (B^{-1} + tI_n)^{-1} X - X^\top (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \geq 0$$

d'où $\boxed{\forall t > 0 \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^\top (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \leq X^\top (B^{-1} + tI_n)^{-1} X}$

Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque, et $t > 0$:

$$\frac{1}{t^\alpha} X^\top (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \leq \frac{1}{t^\alpha} X^\top (B^{-1} + tI_n)^{-1} X$$

et, par croissance de l'intégrale des fonctions réelles à valeurs réelles,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} X^\top (A^{-1} + tI_n)^{-1} X dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} X^\top (B^{-1} + tI_n)^{-1} X dt$$

ce qui s'écrit encore, d'après la question III.1.a :

$$X^\top \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} (B^{-1} + tI_n)^{-1} - \frac{1}{t^\alpha} (A^{-1} + tI_n)^{-1} \right) dt \right) X \geq 0$$

La matrice $F(B) - F(A) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^\alpha} (B^{-1} + tI_n)^{-1} - \frac{1}{t^\alpha} (A^{-1} + tI_n)^{-1} \right) dt$ est donc positive pour tout $A \leq B$:

$$\boxed{F \text{ est matriciellement croissante sur }]0; +\infty[.}$$

Mais, d'après la question III.2.b, on a l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $x > 0$ $F(x) = Cp_\alpha(x)$. Ce qui permet d'affirmer que Cp_α est une fonction matriciellement croissante sur $]0; +\infty[$ puis, en utilisant le résultat de la question I.8.d $p_\alpha = C^{-1}Cp_\alpha$ est matriciellement croissante sur $]0; +\infty[$.

III.3.a Soient $X > 0$ et $x > 0$. On a les égalités suivantes, où les fonction intégrées sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrables sur $[0; X]$

$$\begin{aligned} \int_0^X \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt &= \int_0^X \frac{t}{1+t^2} dt - \int_0^X \frac{1}{x+t} dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln |1+t^2|]_0^X - [\ln |x+t|]_0^X \\ \int_0^X \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt &= \ln \frac{\sqrt{1+X^2}}{x+X} + \ln x \end{aligned}$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+X^2}}{x+X} = 1$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt$ existe et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \ln x}$$

III.3.b On va refaire le raisonnement de la question III.2.c. La fonction $\ln$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc les valeurs propres de S sont strictement positives.

Ainsi, la matrice $\ln(S)$ est bien définie. La décomposition spectrale de $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ permet de calculer la matrice $\ln(S)$

$$\ln(S) = \sum_{i=1}^p (\ln \lambda_i) P_i$$

Mais, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \ln \lambda_i &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i + t} \right) dt \\ \text{d'où} \quad \ln S &= \sum_{i=1}^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i + t} dt \right) P_i \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} \sum_{i=1}^p P_i - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + t} P_i \right) dt \end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + t} P_i$ est la décomposition spectrale de $(S + tI_n)^{-1}$. En effet si $t > 0$ la matrice tI_n est positive d'après la question I.8.d et comme S est définie positive, la question I.8.e montre que $S + tI_n$ est une matrice définie positive. En appliquant le résultat de la question II.4.a, on obtient que la décomposition spectrale de $(S + tI_n)^{-1} = g(S + tI_n)$ est $\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i + t} P_i$.

Finalement :

$$\ln S = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (S + tI_n)^{-1} \right) dt$$

III.3.c On suit ici le raisonnement de la question III.2.e : si $A \leq B$, on a, en utilisant les question I.8.e, $(B + tI_n) \geq (A + tI_n)$, puis $(B + tI_n)^{-1} \leq (A + tI_n)^{-1}$ d'après la question I.12. Ensuite, la question I.8.d montre que $-(A + tI_n)^{-1} \leq -(B + tI_n)^{-1}$. Si $t > 0$, $\frac{t}{1+t^2} > 0$ et la matrice $\frac{t}{1+t^2} I_n$ est positive d'après la question I.8.d, on peut alors appliquer le résultat de la question I.8.e pour avoir

$$\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \leq \frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1}$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a alors, de même qu'à la question III.2.e

$$\begin{aligned} X^\top \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) X &\leq X^\top \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1} \right) X \\ \int_0^{+\infty} X^\top \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) X dt &\leq \int_0^{+\infty} X^\top \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1} \right) X dt \end{aligned}$$

Ainsi, d'après III.1 a)

$$X^\top \left(\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} dt \right) X \geq 0$$

et donc, pour tout $A \leq B$

$$\ln A \leq \ln B$$

$$\boxed{\ln \text{ est une fonction matriciellement croissante sur }]0; +\infty[.}$$