

I. ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ

I.A.1 Afin de prouver la croissance de la suite (u_n) , montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n \leq u_{n+1}$$

est vraie.

- $\mathcal{P}(0)$: par définition, $u_0 = 0$ et, par hypothèse, f est à valeurs dans $[0; 1]$, donc $u_1 = f(u_0) \in [0; 1]$, d'où $u_0 \leq u_1$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: on a $u_{n+2} = f(u_{n+1})$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. D'après l'énoncé, f' est positive, donc f est croissante. Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ en composant par f .
- **Conclusion** : $\forall n \geq 0 \quad u_n \leq u_{n+1}$

Comme f est à valeurs dans $[0; 1]$, la suite (u_n) est également à valeurs dans $[0; 1]$. Elle est ainsi croissante et majorée, donc elle est convergente. Par suite,

La suite (u_n) est croissante et convergente.

I.A.2 Notons E l'ensemble $\{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$. Cet ensemble est non vide car il contient 1 et il est minoré par 0 ; il admet donc une borne inférieure. En outre, en posant $g : x \longmapsto f(x) - x$ l'application de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, g est continue et l'ensemble E est l'image réciproque par g de l'ensemble $\{0\}$, qui est fermé. On en déduit que E est fermé. Sa borne inférieure est donc son minimum.

L'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution.

On aurait également pu résoudre cette question en raisonnant avec des suites. En effet, si l'on note α la borne inférieure de E , alors il existe une suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers α . En outre, pour tout entier n , $f(x_n) = x_n$ et f est continue. En passant à la limite, on en déduit que $f(\alpha) = \alpha$, puis que $\alpha \in E$: c'est donc bien un minimum.

I.A.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En outre, f est continue donc, en passant à la limite quand n tend vers l'infini, $f(\ell) = \ell$. Le réel ℓ est ainsi solution de l'équation $f(x) = x$.

Montrons à présent que $\ell \leq x_f$. Comme f est croissante sur $[0; x_f]$,

$$f([0; x_f]) = [f(0); f(x_f)] = [0; x_f]$$

En outre, $u_0 = 0 \in [0; x_f]$ donc, par récurrence immédiate, $u_n \in [0; x_f]$ pour tout entier n . En passant une nouvelle fois à la limite, il vient $\ell \leq x_f$.

Par minimalité de la solution x_f de l'équation $f(x) = x$, on obtient

$$\ell = x_f$$

I.B Considérons la fonction dérivable $g : x \longmapsto f(x) - x$ définie dans la question I.A.2. Pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = f'(x) - 1$. D'après l'énoncé, $g'(1) > 0$ et $g(1) = 0$, donc il existe $x_0 \in [0; 1[$ tel que $g(x_0) < 0$. En outre, on a l'inégalité

$g(0) = f(0) = u_1 \geq u_0 = 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_1 \in [0; x_0]$ tel que $g(x_1) = 0$. Comme $x_f \leq x_1$, par minimalité de x_f ,

$$x_f \in [0; 1[$$

I.C En notant toujours g la fonction $g: x \mapsto f(x) - x$, on sait que $g(0) \geq 0$, $g(1) = 0$ et que g est deux fois dérivable. On veut donc montrer que g ne s'annule pas sur $[0; 1[$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in [0; 1[$, $g(x) > 0$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = f'(x) - 1$ et $g'(1) \leq 0$. De même, pour tout $x \in [0; 1]$, $g''(x) = f''(x) \geq 0$ et $g''(1) = f''(1) > 0$. On déduit de cette deuxième propriété que g'' est strictement positive sur un voisinage de 1, puis que g' est croissante sur $[0; 1]$ et même strictement sur un voisinage de 1. De la première propriété, il vient alors que g' est strictement négative sur $[0; 1[$.

Ceci montre que g est strictement décroissante, et l'on déduit de l'égalité $g(1) = 0$ que, pour tout $x \in [0; 1[$, $g(x) > 0$. Finalement, comme x_f est le plus petit réel x positif vérifiant $g(x) = 0$,

$$x_f = 1$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(1) > 0$, la fonction f'' est strictement positive sur un voisinage $]a; 1]$ de 1, puis la fonction f' est strictement croissante sur ce voisinage. Puisque f' est positive, ceci impose que $f'(1) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur un voisinage $]b; 1]$ de 1. S'il existait un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = 1$, on aurait alors $f(u_{n-1}) = 1$ donc, par croissance stricte de f , $u_{n-1} = 1 = u_n$. De proche en proche, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est en contradiction avec l'énoncé. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 1$$

I.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - f(u_n) = 1 - f(1 - \varepsilon_n)$$

soit encore

$$f(1 - \varepsilon_n) = 1 - \varepsilon_{n+1}$$

D'après la question précédente, la suite (ε_n) tend vers zéro en l'infini d'où, en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2,

$$f(1 - \varepsilon_n) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(-\varepsilon_n) + \frac{f''(1)}{2!}(-\varepsilon_n)^2 + o(\varepsilon_n^2)$$

Or, $f(1) = 1$ et $f'(1) = m = 1$, d'où

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)$$

D'après la question I.C, la suite (ε_n) ne s'annule pas, donc, en passant à l'inverse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} &= \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{1}{1 - (f''(1)/2)\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n} \left(1 + \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) \right) \end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

I.D.2 Utilisons le lemme de Cesaro en posant, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{f''(1)}{2}$$

Il vient
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\varepsilon_k} - \frac{1}{\varepsilon_{k-1}} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

On reconnaît dans le terme de gauche une somme télescopique donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

puis, étant donné que $\varepsilon_0 = 1$, et en remplaçant ε_n par $1 - u_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 - u_n} = \frac{f''(1)}{2}$$

d'où l'on déduit que
$$\frac{1}{n} \frac{1}{1 - u_n} \sim \frac{f''(1)}{2}$$

car $f''(1)$ est non nul puis, en passant à l'inverse dans l'équivalent et en multipliant des deux côtés par $1/n$,

$$1 - u_n \sim \frac{2}{f''(1)n}$$

I.E.1 Le calcul de la question I.D.1 se réécrit dans ce cas

$$\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)$$

puis
$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(m - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) \right)$$

Comme la suite (ε_n) ne s'annule pas et qu'elle tend vers 0 d'après la question I.C, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \right| = m < 1$$

ce qui permet de conclure, d'après la règle de d'Alembert, que

La série de terme général ε_n est absolument convergente.

De plus,
$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} \right) &= \ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} \right) \\ &= \ln \left(1 - \frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) \right) \\ \ln \left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} \right) &= O(\varepsilon_n) \end{aligned}$$

d'où l'on tire que

La série de terme général $\ln \left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} \right)$ est absolument convergente.

I.E.2 Notons S la somme de la dernière série étudiée dans la question précédente :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(\frac{m^{-(k+1)} \varepsilon_{k+1}}{m^{-k} \varepsilon_k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{m \varepsilon_k} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que

$$S + o(1) = \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(\varepsilon_{k+1}) - \ln(\varepsilon_k) - \ln(m)] = \ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_0) - n \ln(m)$$

Comme $\varepsilon_n = 1 - u_n$ et $\varepsilon_0 = 1$, il vient

$$S + o(1) = \ln \left(\frac{1 - u_n}{m^n} \right)$$

En posant $c = e^S$, on a $c > 0$ et $S = \ln c$, puis

$$c \sim \frac{1 - u_n}{m^n}$$

Finalement,

Il existe $c > 0$ tel que $1 - u_n \sim c m^n$.